Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 2000/2001

15. Übungsblatt zur Vorlesung "Praktische Mathematik"
(Newton–Cotes–Formeln)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Betrachten Sie die Quadraturformel $S(f) = A\,(f(x_1) + f(x_2))$ zur Berechnung von $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. Wie sind A, x_1 und x_2 zu wählen, damit diese Formel für Polynome möglichst hohen Grades exakt ist?

2. Aufgabe (2.5 Punkte) (1+1.5)

Zeigen Sie für die Gewichte

$$d_i = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}\,dt, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

der *Newton–Cotes–Formel* $S_n(f) = \sum_{i=0}^{n} d_i f(x_i)$ die Eigenschaften

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} d_i = b - a$

b) $d_{n-i} = d_i$ im Spezialfall äquidistanter Knoten $t_i = -1 + i\,2/n, \quad i = 0, 1, \dots, n$

Hinweis zu b): Zeigen Sie zunächst, daß für die Lagrangeschen Basispolynome L_n gilt: $L_{n-i}(x) = L_i(b + a - x)$, $x \in [a, b]$.

3. Aufgabe (2.5 Punkte) (1.5+1)

Die *offenen Newton–Cotes–Formeln* zur Berechnung von $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ haben die Form

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n} d_i\, f(x_i)\,,$$

wobei die Stützstellen x_i gegeben sind durch

$$x_i = a + (i+1)\,h\,, \quad i = 0, \dots, n \quad \text{mit} \quad h = \frac{b-a}{n+2}\,.$$

a) Berechnen Sie für $n = 2$ die Gewichte d_i, so daß S_n für alle Polynome vom Grad $\leq n$ exakt ist.

b) Ermitteln Sie für $n = 2$ eine Näherung für das Integral

$$I(f) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

und berechnen Sie den Fehler $|I(f) - S_2(f)|$.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Die Quadraturformel $S_n(f) = \sum_{i=0}^{n} d_i\, f(x_i)$, $d_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in [a,b]$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, $0 \leq i$, $j \leq n$ sei exakt für Polynome vom Grad $\leq m$.
Zeigen Sie:
Ist $f \in \mathcal{C}^{m+1}([a,b])$, so hat das *Restglied*

$$E(f) = \int_a^b f(x)\, dx \; - S_n(f)$$

die Darstellung

$$E(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b \left(\frac{1}{m+1}\,(b-t)^{m+1} - \sum_{i=0}^{n} d_i\,(x_i - t)_+^m \right) f^{(m+1)}(t)\, dt\,.$$

Dabei ist

$$(x_i - t)_+^m = \begin{cases} (x_i - t)^m, & \text{falls } x_i \geq t\,, \\ 0, & \text{falls } x_i < t\,. \end{cases}$$

Die Punkte dieses Übungsblattes gehen nicht in die zu erreichende Punktzahl ein. Wer bisher noch nicht die erforderlichen 50% erreicht hat, kann mit diesen Aufgaben sein Punktekonto aufstocken.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 20.2.01 vor der Vorlesung.