Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 2000/2001

3. Übungsblatt zur Vorlesung "Praktische Mathematik"

(Kondition, Stabilität, Cholesky–Verfahren)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Betrachten Sie für $x > 0$ die Funktionsauswertung

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}.$$

a) Berechnen Sie die relative Konditionszahl $\kappa_{rel}(x) = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|}\,|x|$ des Problems.

b) Ist die Auswertung für $x \approx 0$ gut konditioniert?

c) Berechnen Sie $f(10^{-k})$, $k \in \{1, \ldots, 5\}$ mit dreistelliger Genauigkeit und geben Sie den relativen Fehler des Ergebnisses an.

2. Aufgabe (3 Punkte)

Eine Approximation der Exponentialfunktion durch die abgebrochene Taylorreihe ist

$$\exp(x) \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}\,. \qquad (*)$$

Es soll der Wert $\exp(-5.5)$ durch folgende zwei Algorithmen approximiert werden:

a) Mit Hilfe der Formel $(*)$,

b) $\exp(-5.5) = 1/\exp(5.5)$ und $\exp(5.5)$ wird mit Formel $(*)$ berechnet.

Untersuchen Sie die Stabilität der zwei Algorithmen. Inwiefern spielt dabei die Wahl von N eine Rolle?

3. Aufgabe (3 Punkte)

Sei $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\} =: D$.

a) Für welche $x \in D$ ist die Auswertung von $f(x)$ gut bzw. schlecht konditioniert?

b) Geben Sie einen Algorithmus zur Berechnung von $f(x)$ an, der für $x > 2$ stabil ist.

Hinweis für 2. Aufgabe und 3. Aufgabe:

> Bei der Untersuchung der Algorithmen hinsichtlich der Stabilität gehen Sie dazu davon aus, daß die Ergebnisse der einzelnen Schritte mit einem Fehlerfaktor $1 + \varepsilon_i$ mit $|\varepsilon_i| \leq$ eps behaftet sind. Analysieren Sie den relativen Fehler, der so im Ergebnis entsteht. Verwenden Sie dabei nur lineare Fehlerterme, d.h. vernachlässigen Sie Faktoren der Form $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j$ bzw. ε_i^k.

4. Aufgabe (2 Punkte)

Gegeben sei ein Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ mit positiven Elementen x_j, $j = 1, \ldots, n$, und die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gemäß

$$a_{ij} := \min\{i, j\} \cdot x_i \, x_j \, .$$

a) Berechnen Sie für $n = 3$ die Cholesky–Zerlegung von A.

b) Überlegen Sie sich, ausgehend von Teil a), die Cholesky–Zerlegung von A für beliebiges n und beweisen Sie Ihre Vermutung.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 14.11. vor der Vorlesung.

weitere Literatur zur Vorlesung:

R. Plato, Numerische Mathematik kompakt, Vieweg, 2000.