Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 2000/2001

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Praktische Mathematik"

(Householder–Verfahren)

1. Aufgabe (3 Punkte)

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem $Ax = b$ durch QR–Zerlegung mittels Householder–Verfahren, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 15 \\ 3 & 0 & 20 \\ 0 & 4 & 25 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 47 \\ 71 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe (2 Punkte)

Erläutern Sie anhand des Beispiels $x = (x_1, \varepsilon, 0, \dots, 0)^\top \in R^n$, $x_1 \neq 0$, $\varepsilon \geq 0$, warum bei der Ermittlung von

$$h = \frac{x - \sigma e_1}{\|x - \sigma e_1\|_2}, \qquad Hx = (I - 2hh^\top)x = \sigma e_1$$

die Wahl $\sigma := -\operatorname{sgn}(x_1) \cdot \|x\|_2$ gegenüber der Wahl $\sigma := \operatorname{sgn}(x_1) \cdot \|x\|_2$ ausgezeichnet ist.

3. Aufgabe (2 Punkte)

Es habe $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Spaltenvektoren a_1, a_2,..., $a_n \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie unter Verwendung der QR–Zerlegung die *Hadarmardsche Determinantenabschätzung*

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^{n} \|a_j\|_2.$$

(Hinweis: Man berechne einerseits $|\det A|$ unter Verwendung der Identität $A = QR$. Andererseits gilt $a_j = \sum_{k=1}^{j} r_{kj} q_k$ mit den Spaltenvektoren q_1, q_2,..., q_j von Q.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Man zeige für eine nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$:

a) Ist $v^\top A^{-1} u \neq -1$, so gilt die *Sherman–Morrison–Formel*

$$(A + uv^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1} u}.$$

b) Ist $v^\top A^{-1}u = -1$, so ist $(A + uv^\top)$ singulär.

Hinweis: Für a) multipliziere man

$$(A + uv^\top)\Big(A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u}\Big).$$

5. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm, welches eine QR–Zerlegung mittels Householder–Verfahren berechnet. Testen Sie das Programm an dem Gleichungssystem aus der 1. Aufgabe und an den Beispielen der praktischen Aufgabe vom 2. Übungsblatt, d.h. $Ax = b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, wobei

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

$$b_i = \frac{1}{n + i - 1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dabei gebe man für $n = 50, 100, 200$ $x_{10 \cdot i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots,$ aus. Lösen Sie für $n = 10$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b_k \in \mathbb{R}^n$ mit den rechten Seiten $b_k = e_k$, $k = 1, \ldots, n$, um damit die Inverse von A zu berechnen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der exakten Inversen (siehe 2. Übungsblatt).

Hinweise:

a) Die Benutzer von Scilab können ihre Resultate mit denjenigen vergleichen, die die QR–Zerlegung von Scilab (Aufruf: [Q,R]=qr(A)) liefert. Im Programm kann die Scilab–Routine "householder", die die Spiegelungsmatrix bereitstellt, verwendet werden.

b) Idealerweise sollte es möglich sein, das System für mehrere rechte Seiten b zu lösen, ohne die QR–Zerlegung zu wiederholen. Zur Ersparnis von Speicherplatz sollte die Matrix A dabei mit den Elementen r_{ij} der oberen Dreiecksmatrix R und den Householder–Vektoren h_1,...,h_{n-1} überschrieben werden. Dazu werden die Diagonalelemente r_{ii}, $i = 1, ..., n - 1$ und $r_{nn} = a_{nn}$ in einem besonderen Vektor d gespeichert, so daß die Householder–Vektoren in der unteren Hälfte von A Platz finden.

c) Die nötigen Matrixmultiplikationen der Form

$$(I - 2hh^\top)B = B - hg^\top, \qquad g^\top := 2h^\top B$$

führt man am besten so aus, daß zunächst der Vektor g berechnet und anschließend die Matrix A modifiziert ("aufdatiert") wird.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 21.11. vor der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Di, 28.11. in den Sprechstunden.