Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 2000/2001

5. Übungsblatt zur Vorlesung "Praktische Mathematik"

(Gram–Schmidt–Orthogonalisierung, lineare Ausgleichsprobleme)

1. Aufgabe (1 Punkt)

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, daß sich die Kondition von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch Multiplikation mit Q nicht ändert, d.h. es gilt:

$$\kappa_2(QA) = \kappa_2(A).$$

Dabei werde die Kondition bzgl. der 2-Norm berechnet.

2. Aufgabe (3 Punkte)

Die in der Vorlesung besprochene *Gram–Schmidt–Orthogonalisierung* ist zur Berechnung von QR–Zerlegungen zu instabil. Betrachten Sie dazu die Berechnung der ersten zwei Spalten von Q und R aus einer gegebenen regulären Matrix $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\begin{aligned} r_{11} &:= \|a_1\|\,, \quad q_1 := \frac{1}{r_{11}} \cdot a_1\,, \\ r_{12} &:= q_1^\top a_2\,, \quad \tilde{q}_2 := a_2 - r_{12}\, q_1\,, \quad r_{22} := \|\tilde{q}_2\|\,, \quad q_2 := \frac{\tilde{q}_2}{r_{22}}\,. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie:

   (i) $q_2 \perp q_1$,

   (ii) $r_{22} = \sqrt{\|a_2\|^2 - |< a_2, q_1 >|^2}$.

b) Wird das Skalarprodukt $q_1^\top a_2$ fehlerbehaftet berechnet, d.h. $r_{12}(\delta) = r_{12} + \delta$, so ergibt sich für den Winkel zwischen den Spalten q_1 und $q_2(\delta)$, die mit dem fehlerbehafteten $r_{12}(\delta)$ berechnet wird, in 1. Näherung:

$$\alpha(\delta) \doteq \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{r_{22}}\,.$$

   Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Zusammenhang mit der Stabilität des Algorithmus.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Durch die Punkte

x_k	-1	$-\frac{1}{2}$	1	2
y_k	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{7}$	-2	$\sqrt{3}$

soll ein Kreis gelegt werden. Leiten Sie dazu aus der Kreisgleichung und den Daten durch Einführung neuer, geeigneter Parameter ein *lineares Ausgleichsproblem* her und lösen Sie dieses. Welchen Kreis beschreibt diese Lösung? Es genügt, die Rechnungen auf zwei Nachkommastellen exakt durchzuführen.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Um den Standort des Piratensenders 'Radio Powerplay' festzustellen, werden fünf Peilwagen eingesetzt, mit denen die Richtungen zum Sender ermittelt werden. Die Aufstellung der Wagen ist in einem (x, y)–Koordinatensystem gegeben, und die Tangenswerte der Richtungswinkel α sind von der positiven x–Achse im Gegenuhrzeigersinn gemessen.

Peilwagen	1	2	3	4	5
x–Koordinate	8	22	36	10	13
y–Koordinate	0	7	18	20	10
$\tan\alpha$	1	$-1/2$	$1/2$	-1	0

Stellen Sie die Situation anhand einer Skizze dar. Welches sind die mutmaßlichen Koordinaten des Senders?

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 28.11. vor der Vorlesung.