Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 2000/2001

6. Übungsblatt zur Vorlesung "Praktische Mathematik"

(Iterative Methoden für lineare Gleichungssysteme)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme jeweils die Iterationsmatrix des Jacobi- und des Gauß–Seidel–Verfahrens und untersuche diese Verfahren auf Konvergenz.

2. Aufgabe (3 Punkte)

Zur näherungsweisen Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führen Sie jeweils drei Schritte des mit $\omega = 0.5$ relaxierten Jacobi– und des Gauß–Seidel–Verfahrens ausgehend von $x_0 = (1,0,0)^\top$ aus. Konvergieren die Folgen der so erzeugten Iterierten x_k für $k \to \infty$ gegen die exakte Lösung?

3. Aufgabe (3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $A = L + D + R$ mit $D = \operatorname{diag}(A)$, L strikte untere Dreiecksmatrix von A und R strikte obere Dreiecksmatrix von A.
Zeigen Sie: Die *SOR–Iteration* (relaxiertes Einzelschrittverfahren) lautet in Matrixschreibweise

$$x_{k+1} = M_\omega^{\mathrm{SOR}}\, x_k + N_\omega^{\mathrm{SOR}}\, b$$

mit

$$M_\omega^{\mathrm{SOR}} = (I - \omega E)^{-1} \big((1-\omega)I + \omega F\big)$$

und

$$N_\omega^{\mathrm{SOR}} = \omega\, (I - \omega E)^{-1} D^{-1},$$

wobei $E = -D^{-1}L$ und $F = -D^{-1}R$ ist.

4. Aufgabe (2 Punkte)

Charakterisieren Sie alle regulären Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, bei denen ein Schritt des Gauß–Seidel–Verfahrens, ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$, für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ die exakte Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ liefert.

5. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Zur numerischen Lösung des Randwertproblems

$$u''(x) + u(x) = e^x, \qquad x \in [0, \pi/2], \qquad u(0) = u(\pi/2) = 0,$$

betrachte man auf einem äquidistanten Gitter der Maschenweite $h = \frac{\pi}{2N}$ das zugehörige Differenzenschema

$$v_{j+1} - (2 - h^2)\, v_j + v_{j-1} = h^2 e^{x_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{$*$}$$

mit $x_j = jh$. Für $N = 30$ beziehungsweise $N = 200$ bestimme man eine approximative Lösung von $(*)$ mithilfe des *Relaxationsverfahrens* (in Einzelschritten) mit den folgenden Relaxationsparametern, $\omega = 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 2.3, 2.4$, wobei die Iteration jeweils abgebrochen werden soll, wenn mehr als 1000 Iterationen (für $N = 200$ mehr als 2000 Iterationen) benötigt werden oder falls

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty \le 10^{-5}$$

ausfällt.
Als Startwert wähle man jeweils $x^{(0)} = 0$. Für jede Wahl von ω gebe man die Anzahl der benötigten Iterationsschritte k, $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$ und den Fehler $\max_{j=1,\ldots,N-1} |v_j - u(x_j)|$ tabellarisch an.

Hinweise:

a) Die exakte Lösung des Randwertproblems ist

$$u(x) = \frac{1}{2}\,(e^x - \cos x - e^{\frac{\pi}{2}} \sin x), \qquad x \in [0, \pi/2].$$

b) Die (fortgeschrittenen) Benutzer von Scilab können ihre Resultate mit denjenigen vergleichen, die sie mit dem Randwertproblemlöser ‘bvode’ erhalten.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 5.12. vor der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Di, 12.12. in den Sprechstunden.