Universität des Saarlandes Wintersemester 2000/2001
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

7. Übungsblatt zur Vorlesung "Praktische Mathematik"
(Tschebyscheff–Beschleunigung, Gradientenmethode)

1. Aufgabe (1 Punkt)

Zeigen Sie, daß die *Tschebyscheff–Polynome* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bzgl. dem Skalarprodukt $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$ ein Orthogonalsystem bilden.

2. Aufgabe (3.5 Punkte (0.5+1+1+1))

Die *Tschebyscheff–Polynome der 2. Art* U_n sind definiert durch ($x\in[-1,1]$)

$$U_0(x)=1,\quad U_1(x)=2x,\quad \text{und}\quad U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x),\quad n\geq 1.$$

Zeigen bzw. berechnen Sie:

a) U_n ist ein Polynom n–ten Grades.

b) $U_n(\cos\theta)=\dfrac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta},\quad \theta\in(0,\pi).$

c) $U_n(1)$, $U_n(-1)$.

d) $T_n'(x)=nU_{n-1}(x),\quad n\geq 1,\quad x\in[-1,1].$

Hinweis zu b): Vollständige Induktion und $\sin[(n+1)\theta]+\sin[(n-1)\theta]=2\cos\theta\,\sin(n\theta)$.

3. Aufgabe (2.5 Punkte (1+1.5))

Zeigen Sie, daß die bei der Tschebyscheff–Beschleunigung auftretenden Koeffizienten $\rho_k=2\sigma_2T_{k-1}(\sigma_2)/T_k(\sigma_2)$ der Zwei–Term–Rekursion

$$\rho_1=2,\quad \rho_{k+1}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}\tau^2\rho_k}$$

genügen, wobei $\tau:=1/\sigma_2$. Zeigen Sie ferner für den Grenzwert der Folge $\{\rho_k\}$, daß

$$\lim_{k\to\infty}\rho_k=:\rho=\frac{2}{1+\sqrt{1-\tau^2}}$$

Hinweis: Sie dürfen voraussetzen, daß die Folge $\{\rho_k\}$ konvergiert.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Berechnen Sie, ausgehend vom Startvektor $x_0 = (0, 0, 0)^\top$, 3 Schritte des vorkonditionierten *Verfahrens des steilsten Abstiegs* zur näherungsweisen Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie dabei die sog. *diagonale Vorkonditionierung*, d.h. als Vorkonditionierer die Matrix $B = \mathrm{diag}(A)$, die Diagonale von A.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 12.12. vor der Vorlesung.