Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt Wintersemester 2000/2001

8. Übungsblatt zur Vorlesung "Praktische Mathematik"
(Verfahren der konjugierten Gradienten)

1. Aufgabe (3 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, ausgehend vom Startvektor $x_0 = (0,0,0)^\top$, mit Hilfe des Verfahrens der konjugierten Gradienten die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.
Wieviele Iterationen sind dazu nötig?

2. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

a) Zeigen Sie: Um beim Verfahren der konjugierten Gradienten den Fehler in der *Energienorm* $\|\cdot\|_A = (A\,\cdot\,,\,\cdot\,)^{1/2}$ um einen Faktor ε zu reduzieren, d.h.

$$\|z_m\|_A = \|x_m - x\|_A \leq \varepsilon\, \|z_0\|_A\,,$$

benötigt man höchstens m Iterationen, wobei m die kleinste ganze Zahl ist mit

$$m \geq \frac{1}{2}\sqrt{\kappa_2(A)}\,\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right).$$

Hierbei bezeichnet $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$ die Konditionszahl bzgl. der 2–Norm.
Hinweise:

(i) Benutzen Sie Satz 1 aus der Vorlesung mit $\rho = \frac{\sqrt{\kappa_2(A)}-1}{\sqrt{\kappa_2(A)}+1}$

(ii) Für $a > 1$ gilt
$$\ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right) > \frac{2}{a}.$$

b) Das Verfahren der konjugierten Gradienten werde auf eine positiv definite Matrix A angewendet. Es ist lediglich bekannt, daß $\|z_0\|_A = 1$ und $\|z_{10}\|_A = 2^{-9}$ ist. Berechnen Sie aus diesen Informationen eine untere Schranke für $\kappa_2(A)$ und überprüfen Sie damit die Ungleichung aus a).

3. Aufgabe (3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix mit Eigenvektoren $\{v_j\}_{1\leq j\leq n}$. Der Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ sei eine Linearkombination von $v_1, \ldots, v_k$, $k \leq n$:

$$b = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j \, v_j .$$

Zeigen Sie: Das Verfahren der konjugierten Gradienten zur Lösung von $Ax = b$ liefert mit $x_0 = 0$ die exakte Lösung nach k Schritten, d.h. $z_k = x_k - x = 0$.

4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm, welches ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit dem Verfahren der konjugierten Gradienten löst. Testen Sie das Programm an dem Gleichungssystem aus der 1. Aufgabe und an dem Beispiel der praktischen Aufgabe vom 6. Übungsblatt für $N = 30$ beziehungsweise $N = 200$.
Die Iteration soll jeweils abgebrochen werden, wenn

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty \leq 10^{-5}$$

ausfällt.
Als Startwert wähle man $x^{(0)} = 0$. Man gebe jeweils die Anzahl der benötigten Iterationsschritte k, $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$ und den Fehler $\max_{j=1,\ldots,N-1} |v_j - u(x_j)|$ tabellarisch an.
Wiederholen Sie Ihre Berechnungen mit dem vorkonditionierten Verfahren der konjugierten Gradienten. Verwenden Sie dabei die sog. *diagonale Vorkonditionierung*, d.h. als Vorkonditionierer die Matrix $B = \mathrm{diag}(A)$, die Diagonale von A.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 19.12. vor der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Di, 9.1.2001 in den Sprechstunden.