

1. Übungsblatt zur Vorlesung
“Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen”
(Skalare Erhaltungsgleichungen: Cauchyproblem, Charakteristiken)

1. Aufgabe (3 Punkte)

Gegeben sei die *lineare Advektionsgleichung*

$$u_t + au_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad (1)$$

mit der Konstanten a und der integrierbaren Anfangsverteilung u_0 . Überprüfen Sie, daß die Funktion $u(x, t) = u_0(x - at)$ die *Integralform* von (1):

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx + a \int_{t_1}^{t_2} u(x_1, t) dt - a \int_{t_1}^{t_2} u(x_2, t) dt, \quad (2)$$

für beliebige x_1, x_2, t_1 und t_2 erfüllt.

2. Aufgabe (7 Punkte (3+4))

Betrachten Sie das eindimensionale, *skalare Cauchyproblem*

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (3)$$

Zeigen Sie, daß sich die von den zwei Punkten $x_1 < x_2$ ausgehenden *Charakteristiken* zum Zeitpunkt

$$T = \frac{x_2 - x_1}{f'(u_0(x_1)) - f'(u_0(x_2))}$$

schneiden und folgern Sie daraus, daß das Problem (3) genau dann eine *klassische Lösung* besitzt, wenn $f'(u_0(x))$ monoton steigend in x ist.

Sei nun die *Flußfunktion* $f(u)$ konvex und für die Anfangsbedingung gelte $u'_0(\xi) < 0$. Zeigen Sie, daß sich die von einer Umgebung von ξ ausgehenden Charakteristiken spätestens zum Zeitpunkt

$$T = -\frac{1}{f''(u_0(\xi))u'_0(\xi)}$$

kreuzen und schließen sie daraus, daß das Cauchyproblem (3) mit stetig differenzierbaren Anfangsdaten u_0 eine auf das Zeitintervall $t \in [0, T]$ eingeschränkte Lösung besitzt, wobei

$$T = -\frac{1}{\min(\alpha, 0)}, \quad \alpha = \min_{x \in \mathbb{R}} \frac{d}{dx} f'(u_0(x))$$

gilt. Warum gibt es im linearen Fall ($f(u)_x = au_x$) immer eine klassische Lösung?

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 23.04. **vor** der Vorlesung.