

5. Übungsblatt zur Vorlesung “Asymptotische Analysis”
(Mehrskalenmethode und langsam variierende Koeffizienten)

1. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe der *Mehrskalenmethode* für die folgenden Anfangswertprobleme eine 1-Term-Entwicklung, die für große t gültig ist.

a) $y'' + \varepsilon(y')^3 + y = 0$, für $t > 0$, wobei $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (UE)
(Hinweis: $\cos^3 \phi = \frac{1}{4}[3 \cos \phi + \cos(3\phi)]$)

b) $\varepsilon y'' + \varepsilon \alpha y' + y + \varepsilon y^3 = 0$, für $t > 0$, wobei $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
und α ist eine positive Konstante.

2. Aufgabe (UE)

Die Gleichung für die Winkelauslenkung $\theta(t)$ eines Pendels lautet

$$\theta'' + \sin(\theta) = 0, \text{ für } t > 0,$$

wobei $\theta(0) = \varepsilon$ und $\theta'(0) = 0$ ist. Bestimmen Sie eine 1-Term-Entwicklung der Lösung im Falle von kleinen Oszillationen der Amplitude (d.h. $\varepsilon \ll 1$), die für große Werte von t gültig ist.

3. Aufgabe (6 Punkte (2+2+2))

Betrachten Sie den *langsam variierenden ungedämpften Oszillator* aus der Vorlesung:

$$y'' + k^2(\varepsilon t)y = 0, \text{ für } t > 0, \text{ wobei } y(0) = a, y'(0) = b.$$

- a) Man entwickle $k(\varepsilon t)$ mit Hilfe des Satzes von Taylor (für ε klein) und wende dann eine Standard-Mehrskalentransformation: $t_1 = t$, $t_2 = \varepsilon^\alpha t$ an. Wie verhält sich der erste Term im Vergleich zu

$$y \sim \frac{1}{\sqrt{k(\varepsilon t)}} \left(\alpha_0 \sin \left(\int_0^t k(\varepsilon \tau) d\tau \right) \beta_0 \cos \left(\int_0^t k(\varepsilon \tau) d\tau \right) \right) ? \quad (*)$$

Für welches Zeitintervall gilt diese Entwicklung?

b) Zeigen Sie, daß die *schnelle Zeitskala*

$$f(t, \varepsilon) = \int_0^t k(\varepsilon\tau) d\tau$$

die folgenden Bedingungen erfüllt.

- (i) $f(t, \varepsilon)$ ist positiv und wächst mit t ,
- (ii) $\varepsilon t \ll f$ für $\varepsilon \downarrow 0$,
- (iii) $f(t, \varepsilon)$ ist glatt.

Ist es nötig, daß $f(0, \varepsilon) = 0$ gilt?

c) Ändert sich (*), wenn man anstatt von $t_2 = \varepsilon t$ die Zeitskala $t_2 = \varepsilon t_1$ nimmt?

4. Aufgabe

(UE)

Betrachten Sie das Problem

$$\frac{d}{dt} \left(D(\varepsilon t) \frac{dy}{dt} \right) + y = 0, \text{ für } t > 0, \text{ wobei } y(0) = \alpha, y'(0) = \beta.$$

Der Koeffizient $D(\tau)$ ist hierbei eine glatte positive Funktion mit $D' > 0$. Bestimmen Sie eine 1-Term-Entwicklung der Lösung, die für große Werte von t gültig ist.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 12.1.07 vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 18.1.07 **vor** der Vorlesung.