

**5. Übungsblatt zur Vorlesung “Asymptotische Analysis”**  
(Mehrskalenmethode und langsam variierende Koeffizienten)

**1. Aufgabe** (4 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe der *Mehrskalenmethode* für die folgenden Anfangswertprobleme eine 1-Term-Entwicklung, die für große  $t$  gültig ist.

a)  $y'' + \varepsilon(y')^3 + y = 0$ , für  $t > 0$ , wobei  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ . (UE)  
(Hinweis:  $\cos^3 \phi = \frac{1}{4}[3 \cos \phi + \cos(3\phi)]$ )

b)  $\varepsilon y'' + \varepsilon \alpha y' + y + \varepsilon y^3 = 0$ , für  $t > 0$ , wobei  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$   
und  $\alpha$  ist eine positive Konstante.

**2. Aufgabe** (UE)

Die Gleichung für die Winkelauslenkung  $\theta(t)$  eines Pendels lautet

$$\theta'' + \sin(\theta) = 0, \text{ für } t > 0,$$

wobei  $\theta(0) = \varepsilon$  und  $\theta'(0) = 0$  ist. Bestimmen Sie eine 1-Term-Entwicklung der Lösung im Falle von kleinen Oszillationen der Amplitude (d.h.  $\varepsilon \ll 1$ ), die für große Werte von  $t$  gültig ist.

**3. Aufgabe** (6 Punkte (2+2+2))

Betrachten Sie den *langsam variierenden ungedämpften Oszillator* aus der Vorlesung:

$$y'' + k^2(\varepsilon t)y = 0, \text{ für } t > 0, \text{ wobei } y(0) = a, y'(0) = b.$$

- a) Man entwickle  $k(\varepsilon t)$  mit Hilfe des Satzes von Taylor (für  $\varepsilon$  klein) und wende dann eine Standard-Mehrskalentransformation:  $t_1 = t$ ,  $t_2 = \varepsilon^\alpha t$  an. Wie verhält sich der erste Term im Vergleich zu

$$y \sim \frac{1}{\sqrt{k(\varepsilon t)}} \left( \alpha_0 \sin \left( \int_0^t k(\varepsilon \tau) d\tau \right) \beta_0 \cos \left( \int_0^t k(\varepsilon \tau) d\tau \right) \right) ? \quad (*)$$

Für welches Zeitintervall gilt diese Entwicklung?

b) Zeigen Sie, daß die *schnelle Zeitskala*

$$f(t, \varepsilon) = \int_0^t k(\varepsilon\tau) d\tau$$

die folgenden Bedingungen erfüllt.

- (i)  $f(t, \varepsilon)$  ist positiv und wächst mit  $t$ ,
- (ii)  $\varepsilon t \ll f$  für  $\varepsilon \downarrow 0$ ,
- (iii)  $f(t, \varepsilon)$  ist glatt.

Ist es nötig, daß  $f(0, \varepsilon) = 0$  gilt?

c) Ändert sich (\*), wenn man anstatt von  $t_2 = \varepsilon t$  die Zeitskala  $t_2 = \varepsilon t_1$  nimmt?

#### 4. Aufgabe

(UE)

Betrachten Sie das Problem

$$\frac{d}{dt} \left( D(\varepsilon t) \frac{dy}{dt} \right) + y = 0, \text{ für } t > 0, \text{ wobei } y(0) = \alpha, y'(0) = \beta.$$

Der Koeffizient  $D(\tau)$  ist hierbei eine glatte positive Funktion mit  $D' > 0$ . Bestimmen Sie eine 1-Term-Entwicklung der Lösung, die für große Werte von  $t$  gültig ist.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 12.1.07 vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 18.1.07 **vor** der Vorlesung.