Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 07/08

Extra 6. Übungsblatt zur Vorlesung "Asymptotische Analysis"
(Mehrskalenmethoden für Differenzengleichungen)

1. Aufgabe (UE)

Diese Aufgabe behandelt die Genauigkeit von verschiedenen finite Differenzen Approximationen zur numerischen Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungen der Form:

$$y''(t) + y + \varepsilon y^3 = 0, \text{ für } t > 0. \tag{1}$$

Es sei nun y_n eine Approximation an $y(t_n)$, wobei $t_n = nh$ mit der Zeitschrittweite h.

(i) Die erste Differenzengleichung kommt von einer Standard–Differenzenapproximation der 2. Ableitung:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = -h^2(y_n + \varepsilon y_n^3). \tag{2}$$

Diese Gleichung ist dieselbe Gleichung wie in der Vorlesung.

(ii) Als 2. Methode betrachten wir die *Trapezregel* (Crank–Nicolson). Dies führt zu dem Schema

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = -\frac{h^2}{2}\big[y_{n+1} + y_{n-1} + \varepsilon(y_{n+1}^3 + y_{n-1}^3)\big]. \tag{3}$$

(iii) Die 3. Methode benutzt die *Simpsonregel* in der Herleitung; sie lautet

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = -\frac{h^2}{6}\big[y_{n+1} + 4y_n + y_{n-1} + \varepsilon(y_{n+1}^3 + 4y_n^3 + y_{n-1}^3)\big]. \tag{4}$$

Wir haben somit drei verschiedene Differenzenverfahren 2. Ordnung, mit denen wir (1) lösen wollen.

a) Bestimmen Sie für kleines ε den ersten Term einer Entwicklung der Lösung von (1), der für grosse Werte von t gültig ist.

b) Bestimmen Sie für kleines ε eine 1–Term Entwicklung der Lösung von (2), (3) und (4), der für grosse Werte von n gültig ist.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus Teil a) und b). Was kann man über die relative Genauigkeit der finite Differenzenapproximation aussagen? Von Interesse ist hier die Lösung für kleine Werte von h. Zum Beispiel: Führt die (diskrete) Phase θ dazu, dass die numerische Lösung schneller oder langsamer als die asymptotische (analytische) Lösung ist?

1. Aufgabe (UE)

Bei einem Problem der Populationsgenetik ist man an dem Teil g_n der Population in der n-ten Generation mit einem bestimmten genetischen Merkmal interessiert. Das *Fisher–Wright–Haldane* Modell hierfür ist:

$$g_{n+1} = \frac{r_n g_n^2 + s_n g_n(1-g_n)}{r_n g_n^2 + 2s_n g_n(1-g_n) + t_n(1-g_n)^2}, \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots .$$

Nehmen Sie an, dass $r_n = 1 + \varepsilon\rho f(n)$, $s_n = 1 + \varepsilon\sigma f(n)$ und $t_n = 1 + \varepsilon\tau f(n)$ ist mit den Konstanten ρ, σ und τ. $f(n)$ ist eine positive Funktion mit der Periode N, d.h. $f(n+N) = f(n)$. Aufgrund der Definition von g_n, muss $0 \le g_n \le 1$ gelten. Dies ist z.B. der Fall, wenn für den Startwert $0 \le g_1 \le 1$ gilt.

a) Verwenden Sie eine Entwicklung analog zur Vorlesung und bestimmen Sie so eine 1–Term Approximation von g_n für kleines ε, die für grosses n gültig ist. Nehmen Sie dazu an, dass (zumindest) eine der zwei Konstanten $\alpha = \sigma - \tau$, $\beta = \rho - 2\sigma + \tau$ ungleich Null ist.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil a) eine 1–Term Approximation von den möglichen Stationärzuständen für g_n. Unter welchen Bedingungen an die Konstanten α und β und dem Startwert g_1 hat der Stationärzustand g_∞ die Eigenschaft $0 < g_\infty < 1$?

Referenz: F.C. Hoppensteadt, *Mathematical Methods in Population Biology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Di, 29.1. vorgerechnet.