Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 07/08

2. Übungsblatt zur Vorlesung "Asymptotische Analysis"

(Asymptotische Lösung von (Differential-)Gleichungen)

1. Aufgabe (4 Punkte (1+1+1+1))

Bestimmen Sie für jede Lösung x der folgenden Gleichungen eine *2–Term asymptotische Entwicklung* (für ε klein):

a) $x^2 + (2+\varepsilon)x + 1 + \varepsilon = 0.$ (UE)

b) $x^2 + (1-\varepsilon-\varepsilon^2)x + \varepsilon - 2e^{\varepsilon^2} = 0.$ (UE)

c) $\varepsilon x^3 - 3x + 1 = 0.$ (UE)

d) $\varepsilon^2 x^3 - x + \varepsilon = 0.$

e) $x^2 + \sqrt{1+\varepsilon x} = e^{\frac{1}{2+\varepsilon}}.$

f) $x^2 + \varepsilon\sqrt{2+x} = \cos(\varepsilon).$

g) $x = \displaystyle\int_0^\pi e^{\varepsilon \sin(x+s)}\, ds.$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Eine wichtige, aber schwierige Aufgabe der numerischen linearen Algebra ist die *Berechnung von Eigenwerten einer Matrix*. Einer der Gründe hierfür ist, daß die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sehr empfindlich von den Werten der Koeffizienten der Gleichung abhängen. Ein bekanntes Beispiel hierzu von Wilkinson (1964) ist die folgende Gleichung

$$x^{20} - (1+\varepsilon)210x^{19} + 20.615x^{18} + \cdots + 20! = 0,$$

die auch in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-20) = 210\varepsilon x^{19}.$$

a) Bestimmen Sie für jede Nullstelle dieser Gleichung eine *2–Term asymptotische Entwicklung* (für ε klein).

b) Die Entwicklung in Teil a) hat die Form $f \sim x_0 + \varepsilon^\alpha x_1$. Basierend auf diesem Resultat stellt sich die Frage: Wie klein muß man ε wählen, so daß $|x - x_0| < 10^{-2}$ ist? Ist es fair zu sagen, daß ein anscheinend kleiner Fehler in der Genauigkeit der Koeffizienten der Gleichung eine enorme Auswirkung auf die Werte der Nullstellen hat?

3. Aufgabe (2 Punkte)

Betrachten Sie das *(skalierte) Projektil–Problem*

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{1}{(\varepsilon y + 1)^2}, \qquad \text{für } \tau > 0,$$

wobei $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ ist. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß durch

$$y(\tau) \sim \tau\Big(1 - \frac{1}{2}\tau\Big) + \frac{1}{3}\varepsilon\tau^3\Big(1 - \frac{1}{4}\tau\Big) \qquad (*)$$

eine 2–Term Entwicklung der Lösung für kleines ε gegeben ist. Diese Approximation gilt für $0 \le \tau \le \tau_h$, wobei $\tau_h > 0$ der *Rückkehrzeitpunkt* (d.h. $y(\tau_h) = 0$) ist.
Nehmen Sie die asymptotische Entwicklung $\tau_h \sim \tau_0 + \varepsilon\tau_1$ an und bestimmen Sie τ_0, τ_1 von (*). Begründen Sie physikalisch, warum τ_1 positiv ist.

4. Aufgabe (UE)

Wenn man im Projektil–Problem den *Luftwiderstand* berücksichtigt, erhält man die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2} - \frac{k}{x+R}\frac{dx}{dt},$$

wobei k eine nichtnegative Konstante ist. Weiterhin sei $x(0) = 0$ und $x'(0) = v_0$.

a) Was ist die entdimensionalisierte Version dieses Problems, wenn man die 'richtige' Skalierung aus der Vorlesung benutzt.

b) Bestimmen Sie eine 2–Term Entwicklung der Lösung für kleines ε. Nehmen Sie dazu an, daß $\alpha = kv_0/gR$ unabhängig von ε ist.
Hinweis: y_1 hat die Form $\alpha y_1(\tau) = \int_0^\tau f(s)\,ds - e^{-\alpha\tau}\int_0^\tau f(s)e^{\alpha s}\,ds.$

c) Erhöht oder erniedrigt die Hinzunahme des Luftwiderstandes die Flugzeit?

5. Aufgabe (UE)

Betrachten Sie die folgende *Differenzengleichung zweiter Ordnung*

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = (\alpha + \varepsilon f_n)y_n, \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots,$$

wobei α eine positive Konstante und $f_n = (1/2)^n$ ist.

a) Bestimmen Sie eine 2–Term Entwicklung der Lösung für kleines ε.

b) Es sei $y_0 = 1$, $y_1 = 0$ und $\alpha = 2$. Berechnen Sie die exakte Lösung und die 2–Term Entwicklung aus Teil a) für $n = 2, 3, \dots, 10$. Kommentieren Sie die Genauigkeit der Approximation.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Di, 20.11. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 22.11. **vor** der Vorlesung.