Technische Universität Berlin — Wintersemester 07/08
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt

3. Übungsblatt zur Vorlesung "Asymptotische Analysis"

(Zusammengesetzte asymptotische Entwicklungen, mehrere und innere Grenzschichten)

1. Aufgabe (UE)

Ein Modellproblem (Friedrichs, 1942) für eine *Grenzschicht in einem viskosen Fluid* lautet

$$\varepsilon y'' = a - y', \text{ für } 0 < x < 1,$$

wobei $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ und a eine gegebene positive Konstante ist. Bestimmen Sie den ersten Term der inneren und äußeren Entwicklung und leiten Sie eine *zusammengesetzte Entwicklung* der Lösung dieses Problems her.

2. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

Finden Sie die *zusammengesetzte Entwicklung* der Lösung der folgenden Probleme:

a) $\varepsilon y'' + 2y' + y^3 = 0$, für $0 < x < 1$, wobei $y(0) = 0$, $y(1) = 1/2$.

b) $\varepsilon y'' = f(x) - y'$, für $0 < x < 1$, wobei $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, f stetig.

c) $\varepsilon y'' + (1 + 2x)y' - 2y = 0$, für $0 < x < 1$, wobei $y(0) = \varepsilon$, $y(1) = \sin(\varepsilon)$. (UE)

d) $\varepsilon y'' + y' + y = \int_0^1 K(\varepsilon x, s)y(s)\, ds$, für $0 < x < 1$, wobei $y(0) = 1$, $y(1) = -1$. Weiterhin ist $K(x, s) = e^{-s(1+x)}$. (UE)

3. Aufgabe (2 Punkte)

In der modifizierten Version des *Grodsky–Modells der Insulinabgabe* (Carson et al., 1983) sucht man eine Funktion $y = y(t, \lambda)$, so dass

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = -y + f(t) + \int_0^\infty y(t, \lambda)\, e^{-\gamma\lambda}\, d\lambda, \text{ für } t > 0,$$

wobei $y = g(\lambda)$ an $t = 0$. Weiterhin ist $\gamma > 1$.

a) Finden Sie eine *zusammengesetzte Entwicklung* der Lösung für kleines ε. (UE)

b) Leiten Sie die zusammengesetzte Entwicklung aus Teil a) von der *exakten Lösung*

$$y(t, \lambda) = \left[g(\lambda) - \varepsilon\gamma g_0(1 - e^{-\frac{t}{\varepsilon\gamma}})\right] e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + \int_0^t f(\tau)\, e^{-\frac{\gamma-1}{\varepsilon\gamma}(t-\tau)}\, d\tau,$$

mit $g_0(\gamma) = \int_0^\infty g(\lambda)\, e^{-\gamma\lambda}\, d\lambda$ her. Wie lautet die zusammengesetzte Entwicklung im Fall $\gamma = 1$?

4. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

Bestimmen Sie eine *zusammengesetzte Entwicklung* für die folgenden Probleme und skizzieren Sie die Lösung:

a) $\varepsilon y'' + \varepsilon(x+1)^2 y' - y = x - 1,$ für $0 < x < 1,$ wobei $y(0) = 0,\ y(1) = -1.$

b) $\varepsilon \frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{u'}{1-\varepsilon u'}\right) - u = f(x),$ für $0 < x < 1,$ wobei $u(0) = u(1) = 0.$ (UE)
$E(x)$ und $f(x)$ sind gegebene, glatte, positive Funktionen.

c) $\varepsilon y'' + y(1-y)y' - y = 0,$ für $0 < x < 1,$ wobei $y(0) = y(1) = -2.$

5. Aufgabe (UE)

Die *Reynoldsgleichung* der Schmierungstheorie für einen Gleitschieber lautet (DiPrima, 1968; Shepherd, 1978)

$$\varepsilon \frac{d}{dx}\left(H^3 y y'\right) = \frac{d}{dx}\left(Hy\right), \text{ für } 0 < x < 1,$$

wobei $y(0) = y(1) = 1$ ist. $H(x)$ ist hier eine gegebene, glatte, positive Funktion mit $H(0) \neq H(1)$. Bestimmen Sie eine *zusammengesetzte Entwicklung* für kleines ε. Beachten Sie, daß die Grenzschichtlösung zwar implizit definiert ist, aber dennoch die beiden Entwicklungen zusammengesetzt werden können.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Di, 4.12. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 6.12. **vor** der Vorlesung.