

### 3. Übungsblatt zur Vorlesung “Asymptotische Analysis”

(Zusammengesetzte asymptotische Entwicklungen, mehrere und innere Grenzschichten)

#### 1. Aufgabe

(UE)

Ein Modellproblem (Friedrichs, 1942) für eine *Grenzschicht in einem viskosen Fluid* lautet

$$\varepsilon y'' = a - y', \text{ für } 0 < x < 1,$$

wobei  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$  und  $a$  eine gegebene positive Konstante ist. Bestimmen Sie den ersten Term der inneren und äußeren Entwicklung und leiten Sie eine *zusammengesetzte Entwicklung* der Lösung dieses Problems her.

#### 2. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

Finden Sie die *zusammengesetzte Entwicklung* der Lösung der folgenden Probleme:

a)  $\varepsilon y'' + 2y' + y^3 = 0$ , für  $0 < x < 1$ , wobei  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1/2$ .

b)  $\varepsilon y'' = f(x) - y'$ , für  $0 < x < 1$ , wobei  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ ,  $f$  stetig.

c)  $\varepsilon y'' + (1 + 2x)y' - 2y = 0$ , für  $0 < x < 1$ , wobei  $y(0) = \varepsilon$ ,  $y(1) = \sin(\varepsilon)$ . (UE)

d)  $\varepsilon y'' + y' + y = \int_0^1 K(\varepsilon x, s)y(s) ds$ , für  $0 < x < 1$ , wobei  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = -1$ .  
Weiterhin ist  $K(x, s) = e^{-s(1+x)}$ . (UE)

#### 3. Aufgabe (2 Punkte)

In der modifizierten Version des *Grodsky-Modells der Insulinabgabe* (Carson et al., 1983) sucht man eine Funktion  $y = y(t, \lambda)$ , so dass

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = -y + f(t) + \int_0^\infty y(t, \lambda) e^{-\gamma \lambda} d\lambda, \text{ für } t > 0,$$

wobei  $y = g(\lambda)$  an  $t = 0$ . Weiterhin ist  $\gamma > 1$ .

a) Finden Sie eine *zusammengesetzte Entwicklung* der Lösung für kleines  $\varepsilon$ . (UE)

b) Leiten Sie die *zusammengesetzte Entwicklung* aus Teil a) von der *exakten Lösung*

$$y(t, \lambda) = [g(\lambda) - \varepsilon \gamma g_0(1 - e^{-\frac{t}{\varepsilon \gamma}})] e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{\gamma-1}{\varepsilon \gamma}(t-\tau)} d\tau,$$

mit  $g_0(\gamma) = \int_0^\infty g(\lambda) e^{-\gamma \lambda} d\lambda$  her. Wie lautet die *zusammengesetzte Entwicklung* im Fall  $\gamma = 1$ ?

#### 4. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

Bestimmen Sie eine *zusammengesetzte Entwicklung* für die folgenden Probleme und skizzieren Sie die Lösung:

a)  $\varepsilon y'' + \varepsilon(x+1)^2 y' - y = x - 1$ , für  $0 < x < 1$ , wobei  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = -1$ .

b)  $\varepsilon \frac{d}{dx} \left( E(x) \frac{u'}{1-\varepsilon u'} \right) - u = f(x)$ , für  $0 < x < 1$ , wobei  $u(0) = u(1) = 0$ . (UE)  
 $E(x)$  und  $f(x)$  sind gegebene, glatte, positive Funktionen.

c)  $\varepsilon y'' + y(1-y)y' - y = 0$ , für  $0 < x < 1$ , wobei  $y(0) = y(1) = -2$ .

#### 5. Aufgabe

(UE)

Die *Reynoldsgleichung* der Schmierungstheorie für einen Gleitschieber lautet (DiPrima, 1968; Shepherd, 1978)

$$\varepsilon \frac{d}{dx} (H^3 y y') = \frac{d}{dx} (H y), \quad \text{für } 0 < x < 1,$$

wobei  $y(0) = y(1) = 1$  ist.  $H(x)$  ist hier eine gegebene, glatte, positive Funktion mit  $H(0) \neq H(1)$ . Bestimmen Sie eine *zusammengesetzte Entwicklung* für kleines  $\varepsilon$ . Beachten Sie, daß die Grenzschichtlösung zwar implizit definiert ist, aber dennoch die beiden Entwicklungen zusammengesetzt werden können.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Di, 2.12. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 4.12. **vor** der Vorlesung.