Technische Universität Berlin — Wintersemester 08/09
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Asymptotische Analysis"

(Eck–Grenzschichten und Differenzengleichungen)

1. Aufgabe (UE)

Das Eigenwertproblem für die senkrechte Auslenkung $u(x)$ eines elastischen Balkens unter Spannung ist

$$\varepsilon^2 u'''' - u'' = \lambda u, \text{ für } 0 < x < 1,$$

wobei $u = u' = 0$ an $x = 0, 1$ ist. λ bezeichnet den ε–abhängigen Eigenwert.

a) Bestimmen Sie den ersten Term in der Entwicklung für $u(x)$ und λ.

b) Bestimmen Sie den zweiten Term in der Entwicklung für $u(x)$ und λ.

2. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

Bestimmen Sie eine *zusammengesetzte Entwicklung* für die folgenden Probleme:

a) $\varepsilon y'' + y(y')^2 - y = 0, \text{ für } 0 < x < 1, \text{ wobei } y(0) = 1, \ y(1) = 1.$

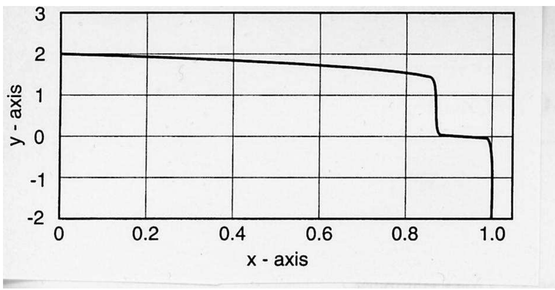
b) $\varepsilon y'' = 9 - (y')^2, \text{ für } 0 < x < 1, \text{ wobei } y(0) = 0, \ y(1) = 1.$

3. Aufgabe (UE)

Betrachten Sie das Problem:

$$\varepsilon y'' + y(1-y)y' - xy = 0, \text{ für } 0 < x < 1,$$

wobei $y(0) = 2$ und $y(1) = -2$. Die numerische Lösung für $\varepsilon = 10^{-3}$ ist in der Abbildung unten zu sehen. Bestimmen Sie basierend auf dieser zusätzlichen Information eine



zusammengesetzte 1–Term Entwicklung der Lösung.
<u>Hinweis:</u> Eine der Grenzschichtlösungen wird eine unbestimmte Konstante enthalten.

4. Aufgabe (6 Punkte (2+2+2))

Es soll die Verwendung von *zentralen Differenzen Approximationen* zur Lösung des singulär gestörten Randwertproblems (aus der Vorlesung)

$$\varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \text{ für } 0 < x < 1, \tag{*}$$

mit $y(0) = a$ und $y(1) = b$ untersucht werden. Hierbei sind die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ stetig.

a) Bestimmen Sie eine zusammengesetzte 1–Term Entwicklung der Lösung der Differenzengleichung

$$(\alpha + \varepsilon)y_{n+1} + 2(\beta - \varepsilon)y_n - (\alpha - \varepsilon)y_{n-1} = 0, \text{ für } n = 1, 2, \ldots N - 1,$$

mit $y_0 = a$, $y_N = b$ und $\alpha \neq 0$. Existieren Grenzschichten für dieses Problem?

b) Man nehme die zentrale Differenzen Approximation der ersten Ableitung, um (*) numerisch zu lösen. Seien $p(x)$ und $q(x)$ konstant. Zeigen Sie, dass man eine Differenzengleichung wie in Teil a) erhält und schreiben Sie die resultierende zusammengesetzte Entwicklung der Lösung auf. Welche Terme der Differentialgleichung tragen nicht zu der zusammengesetzten Entwicklung bei?

c) Die Lösung von (*) hat eine Grenzschicht bei $x = 0$, falls $p(x) > 0$ für $0 \leq x \leq 1$ und eine bei $x = 1$, falls $p(x) < 0$ für $0 \leq x \leq 1$. Kommentieren Sie dies und die Ergebnisse der Teile a) und b).

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Di, 16.12. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 18.12. **vor** der Vorlesung.

*** Ich wünsche allen Hörern ein frohes Weihnachtsfest ***

*** und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2009 ! ***