Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 04/05

3. Übungsblatt zur Vorlesung "Asymptotische Analysis"
(Asymptotische Lösung algebraischer und transzendenter Gleichungen)

1. Aufgabe (5 Punkte (1+1+1+1+1))

Bestimmen Sie für jede Lösung x der folgenden Gleichungen eine *2–Term asymptotische Entwicklung* (für ε klein):

a) $x^2 + (1 - \varepsilon - \varepsilon^2)x + \varepsilon - 2e^{\varepsilon^2} = 0$

b) $\varepsilon x^3 - 3x + 1 = 0$

c) $\varepsilon^2 x^3 - x + \varepsilon = 0$

d) $x^2 + \sqrt{1 + \varepsilon x} = e^{\frac{1}{2+\varepsilon}}$

e) $x^2 + \varepsilon\sqrt{2 + x} = \cos(\varepsilon)$

2. Aufgabe (5 Punkte)

Eine wichtige, aber schwierige Aufgabe der numerischen linearen Algebra ist die *Berechnung von Eigenwerten einer Matrix.* Einer der Gründe hierfür ist, daß die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sehr empfindlich von den Werten der Koeffizienten der Gleichung abhängen. Ein bekanntes Beispiel hierzu von Wilkinson (1964) ist die folgende Gleichung

$$x^{20} - (1 + \varepsilon)210x^{19} + 20.615x^{18} + \cdots + 20! = 0,$$

die auch in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$(x - 1)(x - 2)\ldots(x - 20) = 210\varepsilon x^{19}.$$

a) Bestimmen Sie für jede Nullstelle dieser Gleichung eine *2–Term asymptotische Entwicklung* (für ε klein).

b) Die Entwicklung in Teil a) hat die Form $f \sim x_0 + \varepsilon^\alpha x_1$. Basierend auf diesem Resultat stellt sich die Frage: Wie klein muß man ε wählen, so daß $|x - x_0| < 10^{-2}$ ist? Ist es fair zu sagen, daß ein anscheinend kleiner Fehler in der Genauigkeit der Koeffizienten der Gleichung eine enorme Auswirkung auf die Werte der Nullstellen hat?

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Do, 18.11. **vor** der Vorlesung.