Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 04/05

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Asymptotische Analysis"

(Einführung in die asymptotische Lösung von Differentialgleichungen)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Betrachten Sie das *(skalierte) Projektil–Problem*

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{1}{(\varepsilon y+1)^2}, \qquad \text{für } \tau > 0,$$

wobei $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ ist. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß durch

$$y(\tau) \sim \tau\Big(1 - \frac{1}{2}\tau\Big) + \frac{1}{3}\varepsilon\tau^3\Big(1 - \frac{1}{4}\tau\Big) \tag{*}$$

eine 2–Term Entwicklung der Lösung für kleines ε gegeben ist. Diese Approximation gilt für $0 \le \tau \le \tau_h$, wobei $\tau_h > 0$ der *Rückkehrzeitpunkt* (d.h. $y(\tau_h) = 0$) ist.
Nehmen Sie die asymptotische Entwicklung $\tau_h \sim \tau_0 + \varepsilon\tau_1$ an und bestimmen Sie τ_0, τ_1 von (*). Begründen Sie physikalisch, warum τ_1 positiv ist.

2. Aufgabe (5 Punkte (2+2+1))

Wenn man im Projektil–Problem den *Luftwiderstand* berücksichtigt, erhält man die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2} - \frac{k}{x+R}\frac{dx}{dt},$$

wobei k eine nichtnegative Konstante ist. Weiterhin sei $x(0) = 0$ und $x'(0) = v_0$.

a) Was ist die entdimensionalisierte Version dieses Problems, wenn man die 'richtige' Skalierung aus der Vorlesung benutzt.

b) Bestimmen Sie eine 2–Term Entwicklung der Lösung für kleines ε. Nehmen Sie dazu an, daß $\alpha = kv_0/gR$ unabhängig von ε ist.
Hinweis: y_1 hat die Form $\alpha y_1(\tau) = \int_0^\tau f(s)\,ds - e^{-\alpha\tau}\int_0^\tau f(s)e^{\alpha s}\,ds.$

c) Erhöht oder erniedrigt die Hinzunahme des Luftwiderstandes die Flugzeit?

3. Aufgabe (3 Punkte (2+1))

Betrachten Sie die folgende *Differenzengleichung zweiter Ordnung*

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = (\alpha + \varepsilon f_n)y_n, \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

wobei α eine positive Konstante und $f_n = (1/2)^n$ ist.

a) Bestimmen Sie eine 2–Term Entwicklung der Lösung für kleines ε.

b) Es sei $y_0 = 1$, $y_1 = 0$ und $\alpha = 2$. Berechnen Sie die exakte Lösung und die 2–Term Entwicklung aus Teil a) für $n = 2, 3, \ldots, 10$. Kommentieren Sie die Genauigkeit der Approximation.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Do, 25.11. **vor** der Vorlesung.