

**8. Übungsblatt zur Vorlesung “Asymptotische Analysis”**  
(Beispiele mit mehreren und inneren Grenzschichten)

**1. Aufgabe** (10 Punkte (5+5))

Bestimmen Sie eine *zusammengesetzte Entwicklung* für die folgenden Probleme und skizzieren Sie die Lösung:

- a)  $\varepsilon y'' + \varepsilon(x+1)^2 y' - y = x - 1$ , für  $0 < x < 1$ , wobei  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = -1$ .  
b)  $\varepsilon y'' - y' + y^2 = 1$ , für  $0 < x < 1$ , wobei  $y(0) = 1/3$ ,  $y(1) = 1$ .

**2. Aufgabe** (Zusatzaufgabe 10 Punkte (1+3+3+3))

Bei der Untersuchung von *Explosionen von gasförmigen Gemischen* gelangt man zu folgendem Model für die (entdimensionalisierte) Temperatur  $T(t)$  des Gases:

$$T' = \varepsilon(T_\infty - T)^n \exp\left(\frac{T-1}{\varepsilon T}\right),$$

wobei  $T(0) = 1$  ist. Hierbei ist  $T_\infty > 1$  eine Konstante (sog. adiabatische Explosions-temperatur) und  $n \in \mathbb{N}$  ist die Gesamtreaktionsordnung. Nimmt man eine hohe Aktivierungsenergie an, so ist der Parameter  $\varepsilon$  klein.

- a) Was ist die Temperatur im Stationärzustand?  
b) Bestimmen Sie die ersten 2 Terme der regulären Entwicklung der Temperatur. Diese Entwicklung erfüllt die Anfangsbedingung und beschreibt die Lösung in der Entzündungsphase. Benutzen Sie Ihre Entwicklung von Teil a) und  $T' > 0$ , um eine Skizze der Lösung zu erhalten.  
c) Es verbleibt, die Lösung im Übergangsbereich von Teil a) und b) zu bestimmen. Ein Weg hierzu ist die Einführung der Grenzschichtvariable

$$\tau = \frac{t - 1 - f(\varepsilon)}{\mu(\varepsilon)}$$

wobei  $\mu(\varepsilon)$  durch die Balancierung in der Grenzschicht und  $f(\varepsilon)$  durch das Anpassen mit der Entwicklung von der Entzündungsphase bestimmt werden. Finden Sie eine 2-Term Entwicklung der Lösung in dieser Grenzschicht (der 2.Term wird implizit definiert).

- d) Zeigen Sie: das Anpassen der ersten Terme der Entwicklungen von Teil b) und c) liefert

$$f(\varepsilon) = \exp(-(T_\infty - 1)/\varepsilon).$$

Bemerkung: Dieses Problem lässt sich auch in geschlossener Form lösen, siehe M. Parang und M.C. Jischke, *Adiabatic ignition of homogeneous systems*, AIAA J. **13**, 405–408.

**Abgabe** der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Do, 6.01. **vor** der Vorlesung.

**\* Ich wünsche allen Hörern ein frohes Weihnachtsfest \***

**\* und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2005 ! \***