Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 04/05

5. Übungsblatt zur Vorlesung "Asymptotische Analysis"
(Gleichmäßigkeit und symbolisches Rechnen)

1. Aufgabe (4 Punkte (1+1+1+1))

Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen gleichmäßig für alle $x \in I$ gelten. Falls nicht, verkleinern Sie den Definitionsbereich I, so dass die Aussagen gleichmäßig gelten.

a) $\frac{\varepsilon}{x(1-x)} = \mathrm{O}(\varepsilon),\ \varepsilon \downarrow 0,\ \ I = (0,1)$

b) $\sin\frac{x}{\varepsilon} = \mathrm{O}(1),\ \varepsilon \downarrow 0,\ \ I = (0,1)$

c) $1 + \frac{x}{\varepsilon} e^{-x/\varepsilon} \sim 1,\ \varepsilon \downarrow 0,\ \ I = [0,1]$

d) $e^{(x_2-x_1)/\varepsilon} = \mathrm{o}(\varepsilon^\beta),\ \varepsilon \downarrow 0,\ \ I = \{(x_2,x_1) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ | x_2 < x_1\}$ mit $\beta \in \mathbb{R}^+$ beliebig

2. Aufgabe (3 Punkte) (+praktische Aufgabe b) 5 Punkte)

Eine gegebene Funktion $f(\varepsilon)$ habe die Entwicklung $f \sim a_1\varepsilon^\alpha + a_2\varepsilon^\beta + \dots$.

a) Bestimmen Sie eine Folge von Operationen, die (in der Reihenfolge) α, a_1, β und a_2 (mit $\alpha < \beta$) bestimmen.

b) Implementieren Sie Ihre Prozedur aus a) mithilfe eines symbolischen Programmpakets (z.B. Maple, Mathematica, Mupad) und versuchen Sie so, die Entwicklungen für die Funktionen von der 2. Aufgabe des 2. Übungsblattes zu finden.

3. Aufgabe (3 Punkte) (+praktische Aufgabe b) 5 Punkte)

Betrachten Sie das folgende Randwertproblem

$$y'' = f(\varepsilon, x, y, y'),\ \text{für } a < x < b,$$

wobei $y(a) = \alpha$ und $y(b) = \beta$ ist. f sei eine glatte Funktion und die Konstanten a, b, α und β seien unabhängig von ε. Weiterhin sei angenommen, daß das Problem eine eindeutige Lösung besitzt.

a) Konstruieren Sie einen Algorithmus, der die ersten zwei Terme in der Entwicklung von y für kleines ε bestimmt.

b) Implementieren Sie Ihre Prozedur aus a) versuchen Sie so, die Entwicklung für

$$y'' = -\varepsilon y' + y - 1,\ \text{für } 0 < x < 1,\ \text{mit } y(0) = y(1) = 1$$

zu bestimmen.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Do, 2.12. **vor** der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu den praktischen Aufgaben am Do, 9.12. **vor** der Vorlesung.