Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 04/05

6. Übungsblatt zur Vorlesung "Asymptotische Analysis"

(Einführung in die asymptotische Approximation von Integralen)

1. Aufgabe (2 Punkte (1.5+0.5))

Die Funktion $f(x)$ sei periodisch mit der Periode 2π und habe eine stetig integrierbare Ableitung. Zeigen Sie mit Hilfe der *Methode der partiellen Integration*:

a) Für die *Fourierkoeffizienten*

$$f_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

gilt $f_n = \mathrm{o}(1/n)$ für $n \to \infty$.

b) Verallgemeinern Sie dieses Resultat für periodische Funktionen mit stetig integrierbarer k-ter Ableitung.

2. Aufgabe (5 Punkte (2+2+1))

Die *komplementäre Fehlerfunktion* (vgl. Beispiel 1.4.8 aus Vorlesung) ist definiert durch

$$\mathrm{erfc}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

a) Substituieren Sie $t = x + \tau$ und wenden Sie das *Lemma von Watson* an.

b) Benutzen Sie alternativ zu a) die *Methode der Reskalierung*, indem Sie nach der obigen Substitution, die Skalierung $\tau = u/x$ verwenden.

c) Vergleichen Sie beide Resultate; worin liegt der Unterschied?

3. Aufgabe (3 Punkte (2+1))

Betrachten Sie die Integraldarstellung der *Fakultätsfunktion*

$$z! = \int_0^{\infty} t^z e^{-t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{z \ln t - t}\, dt.$$

a) Wenden Sie die *Methode von Laplace* an, um eine Approximation (sog. *Stirling-Formel*) für $z \to \infty$ zu erhalten. Benutzen Sie hierzu die Reskalierung $t = z + \tau\sqrt{z}$.

b) Kontrolieren Sie die Genauigkeit der 2-Term Entwicklung für $z = 1$.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Do, 9.12. **vor** der Vorlesung.