Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt Wintersemester 04/05

8. Übungsblatt zur Vorlesung "Asymptotische Analysis"
(Beispiele mit mehreren und inneren Grenzschichten)

1. Aufgabe (10 Punkte (5+5))

Bestimmen Sie eine *zusammengesetzte Entwicklung* für die folgenden Probleme und skizzieren Sie die Lösung:

a) $\varepsilon y'' + \varepsilon(x+1)^2 y' - y = x - 1,$ für $0 < x < 1,$ wobei $y(0) = 0,\ y(1) = -1.$

b) $\varepsilon y'' - y' + y^2 = 1,$ für $0 < x < 1,$ wobei $y(0) = 1/3,\ y(1) = 1.$

2. Aufgabe (Zusatzaufgabe 10 Punkte (1+3+3+3))

Bei der Untersuchung von *Explosionen von gasförmigen Gemischen* gelangt man zu folgendem Model für die (entdimensionalisierte) Temperatur $T(t)$ des Gases:

$$T' = \varepsilon(T_\infty - T)^n \exp\Big(\frac{T-1}{\varepsilon T}\Big),$$

wobei $T(0) = 1$ ist. Hierbei ist $T_\infty > 1$ eine Konstante (sog. adiabatische Explosionstemperatur) und $n \in \mathbb{N}$ ist die Gesamtreaktionsordnung. Nimmt man eine hohe Aktivierungsenergie an, so ist der Parameter ε klein.

a) Was ist die Temperatur im Stationärzustand?

b) Bestimmen Sie die ersten 2 Terme der regulären Entwicklung der Temperatur. Diese Entwicklung erfüllt die Anfangsbedingung und beschreibt die Lösung in der Entzündungsphase. Benutzen Sie Ihre Entwicklung von Teil a) und $T' > 0$, um eine Skizze der Lösung zu erhalten.

c) Es verbleibt, die Lösung im Übergangsgebiet von Teil a) und b) zu bestimmen. Ein Weg hierzu ist die Einführung der Grenzschichtvariable

$$\tau = \frac{t - 1 - f(\varepsilon)}{\mu(\varepsilon)}$$

wobei $\mu(\varepsilon)$ durch die Balancierung in der Grenzschicht und $f(\varepsilon)$ durch das Anpassen mit der Entwicklung von der Entzündungsphase bestimmt werden. Finden Sie eine 2–Term Entwicklung der Lösung in dieser Grenzschicht (der 2.Term wird implizit definiert).

d) Zeigen Sie: das Anpassen der ersten Terme der Entwicklungen von Teil b) und c) liefert

$$f(\varepsilon) = \exp\bigl(-(T_\infty - 1)/\varepsilon\bigr).$$

Bemerkung: Dieses Problem lässt sich auch in geschlossener Form lösen, siehe M. Parang und M.C. Jischke, *Adiabatic ignition of homogeneous systems*, AIAA J. **13**, 405–408.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Do, 6.01. **vor** der Vorlesung.

*** Ich wünsche allen Hörern ein frohes Weihnachtsfest ***

*** und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2005 ! ***