Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 04/05

9. Übungsblatt zur Vorlesung "Asymptotische Analysis"

(Eck–Grenzschichten und Differenzengleichungen)

1. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

Bestimmen Sie eine *zusammengesetzte Entwicklung* für die folgenden Probleme:

a) $\varepsilon y'' + y(y')^2 - y = 0, \text{ für } 0 < x < 1, \text{ wobei } y(0) = 1, \ y(1) = 1.$

b) $\varepsilon y'' = 9 - (y')^2, \text{ für } 0 < x < 1, \text{ wobei } y(0) = 0, \ y(1) = 1.$

2. Aufgabe (6 Punkte (2+2+2))

Es soll die Verwendung von *zentralen Differenzen Approximationen* zur Lösung des singulär gestörten Randwertproblems (aus der Vorlesung)

$$\varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \text{ für } 0 < x < 1, \tag{*}$$

mit $y(0) = a$ und $y(1) = b$ untersucht werden. Hierbei sind die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ stetig.

a) Bestimmen Sie eine zusammengesetzte 1–Term Entwicklung der Lösung der Differenzengleichung

$$(\alpha + \varepsilon)y_{n+1} + 2(\beta - \varepsilon)y_n - (\alpha - \varepsilon)y_{n-1} = 0, \text{ für } n = 1, 2, \dots N - 1,$$

mit $y_0 = a$, $y_N = b$ und $\alpha \neq 0$. Existieren Grenzschichten für dieses Problem?

b) Man nehme die zentrale Differenzen Approximation der ersten Ableitung, um (*) numerisch zu lösen. Seien $p(x)$ und $q(x)$ konstant. Zeigen Sie, dass man eine Differenzengleichung wie in Teil a) erhält und schreiben Sie die resultierende zusammengesetzte Entwicklung der Lösung auf. Welche Terme der Differentialgleichung tragen nicht zu der zusammengesetzten Entwicklung bei?

c) Die Lösung von (*) hat eine Grenzschicht bei $x = 0$, falls $p(x) > 0$ für $0 \leq x \leq 1$ und eine bei $x = 1$, falls $p(x) < 0$ für $0 \leq x \leq 1$. Kommentieren Sie dies und die Ergebnisse der Teile a) und b).

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Do, 13.1. **vor** der Vorlesung.