

**5. Übungsblatt zur VL “Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen”**  
(Variationsprobleme mit einseitigen Nebenbedingungen, Variationsungleichungen)

**1. Aufgabe** (5 Punkte)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und  $f \in L^2(\Omega)$ .

- (i) Zeigen Sie, dass ein eindeutiger Minimierer  $u \in U$  von

$$E(w) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw \, dx$$

existiert, wobei

$$U := \{ w \in H_0^1(\Omega) \mid |\nabla w| \leq 1 \text{ f. ü. in } \Omega \}.$$

- (ii) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(w - u) \, dx \geq \int_{\Omega} f(w - u) \, dx, \quad \forall w \in U.$$

**2. Aufgabe**

(UE)

Seien  $\Omega := (-1, 1) \subset \mathbb{R}$  und  $E$  das folgende Energie-Funktional:

$$E(u) := \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (u')^2 - fu \, dx$$

mit

$$f(x) := \begin{cases} 1, & |x| > 0.5 \\ -2, & |x| < 0.5. \end{cases}$$

Lösen Sie folgende Minimierungsprobleme “per Hand” und skizzieren (oder plotten) Sie das Ergebnis:

- (i) Minimieren Sie  $E$  in  $H_0^1(\Omega)$ ,  
(ii) Minimieren Sie  $E$  in  $\{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \geq 0\}$ ,  
(iii) Lösen Sie die zugehörige *Penalty*-Approximation für  $\varepsilon > 0$ : schwache Lösungen von

$$\begin{aligned} -u_{\varepsilon}'' + \frac{1}{\varepsilon} u_{\varepsilon} H(-u_{\varepsilon}) &= f, \quad \text{in } (-1, 1) \\ u_{\varepsilon}(1) = u_{\varepsilon}(-1) &= 0, \end{aligned}$$

wobei  $H$  die Heaviside-Funktion ist.

Hinweis zu (ii):  $u \in H^2(\Omega)$  – laut Vorlesung .

### 3. Aufgabe (5 Punkte)

Seien  $\phi, f \in L^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Definiere

$$U := \{ w \in L^2(\Omega) \mid w \geq \phi \text{ f. ü. in } \Omega \}.$$

Zeigen Sie, dass eine eindeutige Lösung  $u \in U$  der Variationsungleichung

$$\int_{\Omega} u(w - u) dx \geq \int_{\Omega} f(w - u) dx, \quad \forall w \in U$$

existiert.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 29.6. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 5.7 **vor** der Vorlesung.