Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt Sommersemester 2007

1. Übungsblatt zur VL "Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen"

(Separation der Variablen, Charakteristikenmethode)

1. Aufgabe (UE)

Gegeben sei die *poröse Medium* – Gleichung

$$u_t - \Delta(u^\gamma) \;=\; 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty),$$

wobei u nichtnegativ ($u \geq 0$) und $\gamma > 1$ eine Konstante seien.
Finden Sie mit dem Separationsansatz $u(\mathbf{x},t) = v(t)w(\mathbf{x})$ eine Lösung dieser Gleichung.
Hinweis: Machen Sie für w den Ansatz $w(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\alpha$ für ein $\alpha > 0$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Finden Sie mit Hilfe der Charakteristikenmethode eine Lösung für die *Eikonalgleichung* aus der geometrischen Optik

$$|\nabla u| \;=\; 1 \quad \text{in} \quad \Omega \;=\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;|\; y > 0\right\}, \qquad u|_{\partial\Omega} \;=\; \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Hinweis: Für die nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{aligned} F(Du,u,x) &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u &= f \quad \text{auf} \quad \Gamma \subseteq \partial\Omega, \end{aligned}$$

erhält man mit der Charakteristikenmethode folgendes System von gewöhnlichen DGLen:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(s) &= -D_xF(\mathbf{p}(s),z(s),\mathbf{x}(s)) - D_zF(\mathbf{p}(s),z(s),\mathbf{x}(s))\mathbf{p}(s) \\ \dot{z}(s) &= D_pF(\mathbf{p}(s),z(s),\mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) &= D_pF(\mathbf{p}(s),z(s),\mathbf{x}(s)), \end{aligned} \right.$$

wobei $z, \mathbf{p}$ durch $z(s) := u(\mathbf{x}(s))$ und $\mathbf{p}(s) := Du(\mathbf{x}(s))$ definiert sind.
Bemerkung: Das gewöhnliche DGL–System zur *Hamilton–Jacobi–Gleichung* aus der Vorlesung ist ein Spezialfall davon.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass man aus einer stetigen schwachen Lösung der Erhaltungsgleichung

$$\begin{aligned} w_t + H(w)_x &= 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ w(x,t=0) &= f(x), \end{aligned}$$

mit $f \in C(\mathbb{R})$, $H \in C(\mathbb{R})$, eine klassische Lösung der *Hamilton–Jacobi–Gleichung*

$$\begin{aligned} u_t + H(u_x) &= 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,t=0) &= g(x) \end{aligned}$$

gewinnen kann. Welcher Beziehung müssen die Anfangsdaten genügen?
Bemerkung: Der Einfachheit halber nehmen Sie in der Rechnung zusätzlich an, dass das gewonnene u stetig differenzierbar in t sei.

4. Aufgabe (UE)

Berechnen Sie die *klassische Lösung* von

$$\begin{aligned} S_t - c\,|\nabla S| &= 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ S(\mathbf{x},0) &= S_0(|\mathbf{x}|), \end{aligned}$$

wobei $c > 0$ konstant ist, und $S_0 \in C^1([0,\infty))$ mit $S_0' \leq 0$ und $S_0'(0) = 0$.
Darüber hinaus sollte für ein festes $r_0 > 0$ gelten: $S_0|_{[0,r_0)} > 0$ und $S_0|_{(r_0,\infty)} < 0$.
Zeigen Sie, dass sich die Wellenfront $S(\mathbf{x},t) = 0$ unabhängig von der "Form" der Anfangsbedingung S_0 ausbreitet.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 4.5. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 10.5. **vor** der Vorlesung.