Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2007

2. Übungsblatt zur VL "Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen"

(Obere/untere Schranken, Existenz schwacher Lösungen, Fixpunktsätze)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und $f \in C(\overline{\Omega})$. Finden Sie konstante untere und obere (a-priori) Schranken für eine klassische Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u - F(u) &= f(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive monoton wachsende Funktion ist, mit $F \in C^1(\mathbb{R})$.

2. Aufgabe (UE)

Gegeben sei das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + b(\nabla u) &= f(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass eine eindeutig bestimmte schwache Lösung $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ existiert, vorausgesetzt: $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei eine Lipschitz-stetige Abbildung mit einer hinreichend kleinen Lipschitz-Konstante.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $g \in L^\infty(\Omega)$, und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive C^2-Funktion mit $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ gegeben. Man zeige, dass die Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(u) + g(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung in $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ hat.
Hinweise:

a) Benutzen Sie folgende Version des Fixpunktsatzes von Schauder:
Es sei K eine nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge eines Banachraumes X. Ist eine Abbildung $F : K \to K$ stetig und kompakt, d.h. sie bildet beschränkte Mengen in präkompakte Mengen ab, so hat F einen Fixpunkt in K.

b) Dafür schreiben Sie die rechte Seite der Gleichung in

$$f(u) + g(x) \;=\; \int_0^1 f'(tu^*(x) + (1-t)u(x))dt \cdot (u - u^*)$$

mit einem geeignetem u^* um, und benutzen Sie dann für die Definition des Fixpunkt-Operators

$$a[\phi](x) \;:=\; \int_0^1 f'(tu^*(x) + (1-t)\phi(x))dt.$$

Wenden Sie das Vergleichsprinzip für *schwache* Lösungen anstelle vom klassischen Maximumprinzip an.

c) Zeigen Sie anschließend, dass die Lösung eindeutig ist (z.B. mit der „Energiemethode“ wie im Satz 14.5 aus der Vorlesung).

4. Aufgabe (UE)

Gegeben sei das Dirichlet–Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= e^u - c(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ist, und $c \in L^\infty(\Omega)$.

a) Finden Sie eine untere Lösung $\underline{u}(x)$, und eine obere konstante Lösung $\overline{u}$ für die obige Gleichung.
Hinweis. Benutzen Sie für die untere Lösung die Green'sche Funktion für den Laplace–Operator auf Ω.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung eine Lösung u in $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ hat.
Hinweis. Ersetzen Sie die Nichtlinearität zuerst durch $h(u)$, mit

$$h(z) \;=\; \begin{cases} e^{\overline{u}}, & z \geq \overline{u} \\ e^z, & z < \overline{u}, \end{cases}$$

und benutzen Sie den Fixpunktsatz von Leray–Schauder/Schäfer. Motivieren Sie anschließend mit dem Vergleichsprinzip, warum das Abschneiden mittels h keine Wirkung auf die gefundene Lösung hat.

c) Zeigen Sie, dass die Lösung u eindeutig ist.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 18.5. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 24.5. **vor** der Vorlesung.