Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2007

4. Übungsblatt zur VL "Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen"

(Variationsprobleme mit Nebenbedingungen)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Gesucht wird eine Funktion $u(x)$, die die Lage eines an zwei Punkten (x_0, u_0) und (x_1, u_1) aufgehängten Seils der Länge l unter dem Einfluß der Schwerkraft beschreibt. Das Prinzip der minimalen potentiellen Energie ergibt das folgende Variationsproblem:

$$\int_{x_0}^{x_1} u\sqrt{1+u'^2}dx \;=\; \min!, \quad u(x_0) \;=\; u_0, \quad u(x_1) \;=\; u_1,$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+u'^2}dx \;=\; l.$$

Die Lösung ist bekannt als die *Kettenlinie*.
Hinweis. Variieren Sie den Integrand um $\lambda\sqrt{1+u'^2}$ (λ Lagrange'scher Multiplikator):

$$L(u) = u\sqrt{1+u'^2} + \lambda\sqrt{1+u'^2},$$

und lösen Sie die entsprechende Euler-Lagrange-Gleichung, unter der Annahme, dass u klassisch ist. (Gleiches Prinzip wie bei Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen aus der Analysis)

2. Aufgabe (UE)

Gegeben sei das folgende *isoperimetrische* Variationsproblem:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+u'^2}dx \;=\; \min!, \qquad u(-1) \;=\; u(1) \;=\; 0,$$

unter der Nebenbedingung

$$F(u) \;=\; \int_{-1}^{1} \left(u - \frac{\pi}{4}\right) dx \;=\; 0.$$

a) Zeigen Sie für $1 < q < 2$, dass es für $R > 0$ hinreichend groß einen Minimierer in

$$U \;=\; \left\{u \in W_0^{1,q}(-1,1) \;\middle|\; F(u) = 0, \;\; \|u\|_{W_0^{1,q}(-1,1)} \leq R\right\}$$

gibt.
Hinweis. Passen Sie die Beweise der Sätze 14.17, 14.18 aus der Vorlesung entsprechend an. Benutzen Sie dabei die stetige Einbettung

$$W_0^{1,p}(-1,1) \;\hookrightarrow\; C^{0,\alpha}[-1,1], \qquad \alpha \;=\; 1 - \frac{1}{p}, \qquad 1 \;<\; p \;<\; \infty.$$

Der Satz von *Arzela–Ascoli* gilt auch für beschränkte Folgen in $C^{0,\alpha}[-1,1]$, $0 < \alpha \leq 1$.

b) Warum wurde $q < 2$ vorausgesetzt?
Hinweis. s. formale Lösung in der Vorlesung.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $q > 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$, ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= |u|^{q-1}u \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie mit den Methoden aus der Vorlesung, Kapitel 14.5, die Existenz einer nichttrivialen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ für $1 < q < \frac{n+2}{n-2}$.
Hinweise:

- Vermeiden Sie die triviale Lösung beim Aufstellen der Nebenbedingung für das entsprechende Variationsproblem, nämlich

$$u \in U = \left\{ w \in H_0^1(\Omega) \mid \int_\Omega G(w) = 0 \right\},$$

  wobei G eine geeignete Stammfunktion von $g(x) = |x|^{q-1}x$ ist.

- Modifizieren Sie den Beweis vom Satz 14.18 aus der Vorlesung entsprechend. Verwenden Sie dazu folgenden Spezialfall vom Sobolev'schen Einbettungssatz (für $n > 2$):

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow (\hookrightarrow) \; L^p(\Omega), \qquad 1 \le p \underset{(<)}{\le} \frac{2n}{n-2}.$$

- Skalieren Sie anschliessend den möglichen Minimierer so um, dass er die Gleichung (1) schwach löst (d.h. der Lagrange-Multiplikator $\lambda = 1$).

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 15.6. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 21.6. **vor** der Vorlesung.