Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2007

5. Übungsblatt zur VL "Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen"
(Variationsprobleme mit einseitigen Nebenbedingungen, Variationsungleichungen)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $f \in L^2(\Omega)$.

(i) Zeigen Sie, dass ein eindeutiger Minimierer $u \in U$ von

$$E(w) \;=\; \int_\Omega \frac{1}{2}\,|\nabla w|^2 - f w \, dx$$

existiert, wobei

$$U \;:=\; \big\{\, w \in H_0^1(\Omega) \;\mid\; |\nabla w| \;\leq\; 1 \quad \text{f. ü. in } \Omega \,\big\}.$$

(ii) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(w-u)\, dx \;\geq\; \int_\Omega f(w-u)\, dx, \qquad \forall\, w \in U.$$

2. Aufgabe (UE)

Seien $\Omega := (-1,1) \subset \mathbb{R}$ und E das folgende Energie-Funktional:

$$E(u) \;:=\; \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(u')^2 - f u \; dx$$

mit

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} 1, & |x| > 0.5 \\ -2, & |x| < 0.5\,. \end{cases}$$

Lösen Sie folgende Minimierungsprobleme "per Hand" und skizzieren (oder plotten) Sie das Ergebnis:

(i) Minimieren Sie E in $H_0^1(\Omega)$,

(ii) Minimieren Sie E in $\{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \geq 0\}$,

(iii) Lösen Sie die zugehörige *Penalty*–Approximation für $\varepsilon > 0$: schwache Lösungen von

$$\begin{aligned} -u_\varepsilon'' + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon H(-u_\varepsilon) \;&=\; f, \quad \mathit{in}\ (-1,1) \\ u_\varepsilon(1) = u_\varepsilon(-1) \;&=\; 0, \end{aligned}$$

wobei H die Heaviside-Funktion ist.

Hinweis zu (ii): $u \in H^2(\Omega)$ – laut Vorlesung .

3. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $\phi, f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Definiere

$$U \ := \ \left\{ w \in L^2(\Omega) \ \middle| \ w \ \geq \ \phi \quad \text{f. ü. in } \Omega \right\}.$$

Zeigen Sie, dass eine eindeutige Lösung $u \in U$ der Variationsungleichung

$$\int_\Omega u(w-u)\,dx \ \geq \ \int_\Omega f(w-u)\,dx, \qquad \forall\, w \in U$$

existiert.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 29.6. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 5.7 **vor** der Vorlesung.