Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2007

6. Übungsblatt zur VL "Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen"
(Parabolische Sobolevräume)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\xi \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie mit dem Satz 15.1 aus der Vorlesung, dass für $n = 1$ $\delta_\xi \in H^{-1}(\Omega)$ gilt. Zeigen Sie durch Gegenbeispiele, dass im Allgemeinen $\delta_\xi \notin H^{-1}(\Omega)$ für $n \geq 2$.
Hinweis. $H_0^1(\Omega) \not\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ für $n \geq 2$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $f \in L^2(\Omega)$. Sei $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine ON-Basis von $H_0^1(\Omega)$ und $u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k$ die Lösung von

$$\int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla w_k \, dx = \int_\Omega f w_k \, dx$$

für alle $k = 1, ..., m$ (vgl. Galerkin-Methode aus der VL, Kap. 14.1). Zeigen Sie, dass eine Teilfolge von $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ existiert, die in $H_0^1(\Omega)$ gegen die schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

schwach konvergiert. Konvergiert die ganze Folge dann auch schwach dagegen?

3. Aufgabe (UE)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und $T > 0$. Es gelte für die Folge (u_k):

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ u_k' &\rightharpoonup v \quad \text{in } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $v = u'$.
Hinweis. Sei $\phi \in C_0^1(0, T)$, $w \in H_0^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_0^T \langle u_k'(t), \phi(t) w \rangle \, dt = -\int_0^T \langle u_k(t), \phi'(t) w \rangle \, dt,$$

wobei das Symbol $\langle .,. \rangle$ entsprechend zu interpretieren ist.

4. Aufgabe (UE)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $m \geq 0$, $1 < p < \infty$, $V := W_0^{m,p}(\Omega)$, und $f \in L^q(\Omega \times (0,T))$ mit $T > 0$ und $q = p/(p-1)$. Das Funktional b sei definiert durch

$$\langle\, b(t), v \rangle \; := \; \int_\Omega f(x,t) v(x)\, dx, \qquad \forall\, v \in V, \quad t \in (0,T).$$

Zeigen Sie: $b \in L^q(0,T;V')$.
Hinweis. Prüfen Sie die Meßbarkeit von $t \mapsto \langle\, b(t), v \rangle$.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 13.7. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 19.7. **vor** der Vorlesung.