Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2007

7. Übungsblatt zur VL "Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen"

(Parabolische Evolutionsgleichungen)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Gegeben sei die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f(x,t) && \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ u(t) &= 0 && \text{auf} \quad \partial\Omega,\ t \geq 0, \\ u(t=0) &= u_0 && \text{in} \quad \Omega, \end{aligned}$$

mit $u_0 \in L^2(\Omega)$. Die Funktion $f \in L^\infty(\Omega \times [0,T])$, $\forall\, T > 0$, sei für ein $\tau > 0$ τ-periodisch in t, d.h. $f(x,t) = f(x,t+\tau)$ $(x \in \Omega, t \geq 0)$. Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Anfangswert $u_0 \in L^2(\Omega)$ gibt, so dass die zugehörige Lösung u τ-periodisch ist.
Hinweis. Betrachten Sie die Fixpunktabbildung $A(u_0) = u(\tau)$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben sei die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= u^2, && (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty), \\ u(0,t) &= u(1,t), && t \geq 0, \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t), && t \geq 0, \\ u(x,t=0) &= u_0(x), && x \in (0,1). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $T > 0$ ein $u_0 \in L^2(0,1)$ existiert, so dass für die zugehörige Lösung das maximale Zeitintervall $t_{\max} = T < \infty$ ist. Verwenden Sie dabei, dass die Gleichung eine eindeutige Lösung $u \in C(0, t_{\max}, L^2(\Omega))$ hat.
Hinweis. Wählen Sie $u_0 \equiv const.$

3. Aufgabe (UE)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie für $u_0 \in L^2(\Omega)$, dass die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \arctan(u) u_x && \text{in} \quad \Omega \times (0,T], \\ u(t) &= 0 && \text{auf} \quad \partial\Omega,\ t \in [0,T], \\ u(t=0) &= u_0 && \text{in} \quad \Omega \end{aligned}$$

eine eindeutige zeitglobale schwache Lösung $u \in C(0,\infty, L^2(\Omega))$ besitzt.
Hinweis. Verwenden Sie den Satz 15.7. aus der Vorlesung.

4. Aufgabe (UE)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $T > 0$, und $c \in C(0,T,L^p(\Omega))$, wobei $\frac{n}{2} < p \le \infty$, $1 \le p$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u - c(x,t)u &= 0 && \text{in} \quad \Omega \times (0,T], \\ u(t) &= 0 && \text{auf} \quad \partial\Omega,\ t \ge 0, \\ u(t=0) &= u_0 && \text{in} \quad \Omega \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $u \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T,H^{-1}(\Omega)) \cap C(0,T,L^2(\Omega))$ besitzt.
Hinweis. Benutzen Sie die *Gagliardo-Nirenberg*–Ungleichung ($1 \le p,r,q \le \infty$)

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \;\le\; C\|\nabla u\|^{\alpha}_{L^r(\Omega)}\|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}, \qquad \frac{1}{p} \;=\; \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{n}\right) + (1-\alpha)\frac{1}{q}, \qquad \alpha \in [0,1],$$

und folgende Sobolev-Einbettungen:

- $n = 1:$ $\quad H^1_{(0)}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$;
- $n = 2:$ $\quad H^1_{(0)}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 \le p < \infty$;
- $n > 2:$ $\quad H^1_{(0)}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 \le p \le \frac{2n}{n-2}$.

5. Aufgabe (UE)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t + \Delta\Delta u &= 0 && \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ u(t) \;=\; \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) &= 0 && \text{auf} \quad \partial\Omega,\ t \in [0,T], \\ u(t=0) &= u_0 && \text{in} \quad \Omega, \end{aligned}$$

mit $u_0 \in L^2(\Omega)$, eine eindeutige schwache Lösung besitzt. Wo liegt sie?

6. Aufgabe (UE)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Gegeben sei die Gleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= -u|u| && \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ u(t) &= 0 && \text{auf} \quad \partial\Omega,\ t \ge 0, \\ u(t=0) &= u_0 && \text{in} \quad \Omega, \end{aligned}$$

mit $u_0 \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie für $n = 2$ und $n = 3$, dass sie eine eindeutige schwache Lösung $u \in C(0,\infty,L^2(\Omega))$ besitzt.
Hinweis. Beachten Sie: für $u \in L^2(\Omega)$ gilt i.A. $u|u| \notin H^{-1}(\Omega)$! Benutzen Sie bei der Fixpunktiteration $-|u(t)|w(t)$ als rechte Seite, und schätzen Sie dann mit Hilfe der *Gagliardo-Nirenberg*–Ungleichung ab.