

Aufgabe 1 (7+4 Punkte)

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung der Matrix $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\tilde{A}x = b$ wobei $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 13 \end{bmatrix}$ und $\tilde{A} = CC^T$ mit $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 2 (4+7 Punkte)

a) Es soll die Funktion der Form $f_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 \sqrt{x+1} + \lambda_3 2^x$ bestimmt werden, die die Wertepaare

x_i	-1	0	3	8
y_i	3.5	-4	20	-9

am besten im Sinne der Summe der kleinsten Fehlerquadrate approximiert. Bestimmen Sie dazu Matrix A und rechte Seite b eines linearen Ausgleichsproblems, das $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ als Lösung hat.

(Achtung: Nach der eigentlichen Lösung ist hier nicht gefragt.)

b) Bestimmen Sie den Dreiecksfaktor R der QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ mittels Householdertransformationen.

Aufgabe 3 (4+2 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x+1}$ soll an der Stelle $x^* = 0$ numerisch abgeleitet werden.

a) Bestimmen Sie den vorwärts gerichteten Differenzenquotienten $D_1 f(x^*, h)$, sowie den zentralen Differenzenquotienten $D_2 f(x^*, h)$, jeweils für $h = \frac{1}{5}$ und $h = \frac{1}{10}$.

b) Verbessern Sie die Genauigkeit von $D_1 f(x^*, h)$ mittels h -Extrapolation.

Aufgabe 4 (5+3 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x+1}$ soll im Intervall $[1; 3]$ numerisch integriert werden.

a) Bestimmen Sie den gesuchten Wert mit der (unsummierten) Simpsonregel und mit der summierten Rechteckregel mit $n = 2$ Teilintervallen.

b) Geben Sie eine Fehlerschranke für das in a) errechnete Ergebnis der summierten Rechteckregel mit $n = 2$ an.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms zu den Punkten $(-2, 2), (1, -4), (5, 4)$.

Aufgabe 6 (2+3 Punkte)

a) Erläutern Sie das eindimensionale Newton-Verfahren graphisch.

b) Berechnen Sie die ersten zwei Iterationen des Newton-Verfahrens angewandt auf die Funktion $f(x) = x^2 - 6x + 9$ mit Startwert $x_0 = 5$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Konditionszahl der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 99 \\ 1 & 100 \end{bmatrix}$ in der ∞ -Norm.

Zusatzaufgabe (4 Punkte)

Wieviele verschiedene Gleitpunktzahlen gibt es bei m -stelliger Mantisse, e -stelligem Exponenten mit je einem Vorzeichen im Dezimalsystem?