

10. Übungsblatt zur VL “Numerik für Informatiker”
(Numerische Differentiation))

Alle Rechnungen auf diesem Blatt sollen mit 16-stelliger Genauigkeit durchgeführt werden. Es gilt $D_1f(x, h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $D_2f(x, h) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.

1. Aufgabe (6 Punkte)

- Berechnen Sie D_1f und D_2f für $f = \cos(x)$, $x = 1$ und $h = 10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-15}$.
- Berechnen Sie die exakten Werte durch Auswerten der analytischen Ableitung und geben Sie die Fehler an.
- Berechnen Sie die optimale Schrittweite h für $D_1f(x, h)$ mit der Faustformel aus der Vorlesung.

2. Aufgabe (6 Punkte)

- Berechne $D_1f(x, h)$ für $f = \cos(x)$, $x = 2$, $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$.
- Verbessere die Näherung mittels h -Extrapolation bis zur Ordnung 4.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Kombinieren Sie $D_1f(x, h)$ und $D_1f(x, \frac{h}{10})$ zu einer Differenzenformel der Ordnung 2. Hinweis: Es gilt die Fehlerentwicklung $D_1f(x, h) - f'(x) = \frac{1}{2}f''(x)h + \frac{1}{6}f'''(x)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$.

4. Aufgabe (2 Punkte)

Wahr oder falsch (ohne Begründung; Antwort richtig: 0.5 Punkte, falsch: -0.5 Punkte)

- Notwendig für die Differenzenformel $D_1f(x_0, h)$ ist, daß f in x_0 stetig ist.
- Hinreichend für die Differenzenformel $D_1f(x_0, h)$ ist, daß f in x_0 stetig ist.
- D_1f nennt man auch zentrale Differenzenformel.
- Es sind mehr als 5 Funktionsauswertungen notwendig, um durch h -Extrapolation von D_1f eine Näherung der Ordnung 5 zu erhalten.

Abgabe - in der Vorlesung am 18. Januar oder
- vorher im Briefkasten zwischen den Räumen MA470, MA471

Besprechung im Tutorium am 21. Januar