

12. Übungsblatt zur VL “Numerik für Informatiker”
(Numerische Integration II)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Leiten Sie die offene Newton-Cotes-Formel mit 3 Knoten für das Intervall $[-1, 1]$ her.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Verwenden Sie die Gauß-Quadraturformel mit 3 Knoten, um folgende Integrale anzunähern. Geben Sie außerdem Fehlerabschätzungen an. Bestimmen Sie dann den exakten Wert und geben sie die wahren Fehler an.

a) $\int_{-1}^1 2x^2 - 8dx$ b) $\int_{-1}^1 \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$ c) $\int_{-1}^1 3x^3 + 2x^2 - 5dx$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Approximieren Sie $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ mit der summierten Trapezregel, und zwar mit $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$, $n = 8$ und verbessern Sie die so gewonnenen Werte mittels Romberg-Extrapolation.

4. Aufgabe (2 Punkte)

Wahr oder falsch (ohne Begründung; Antwort richtig: 0.5 Punkte, falsch: -0.5 Punkte)

- a) Die Simpsonregel braucht genausoviele Funktionsauswertungen wie die 3-Knoten-Gauß-Formel.
- b) Die summierte Simpsonregel braucht genausoviele Funktionsauswertungen wie die summierte 3-Knoten-Gauß-Formel.
- c) Romberg-Extrapolation braucht extra Funktionsauswertungen.
- d) Die Gewichte der Newon-Cotes-Formeln können, im Gegensatz zu den Gauß-Formeln, negativ werden, wodurch Auslöschungsfehler möglich sind.

Achtung: Praktische Aufgabe auf der Rückseite!

Abgabe - in der Vorlesung am 1. Februar oder
- vorher im Briefkasten zwischen den Räumen MA470, MA471
Besprechung im Tutorium am 4. Februar

Praktische Aufgabe (10 Punkte)

Implementieren Sie das Romberg-Verfahren zur Approximation von $\int_a^b f(x)dx$.

Schreiben Sie dazu eine Routine `romberg` mit folgenden Parametern: die Grenzen a, b , den Integer $k \geq 1$ und das Fließkommazahlen-Array F der Länge $2^k + 1$ mit $F = [f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{2^k})]$ wobei $x_i = a + i \frac{b-a}{2^k}$. Als Ergebnis soll die Romberg-Extrapolation der summierten Trapezregel geliefert werden.

Wenden Sie Ihre Routine auf $\int_2^4 x^{-1}dx$ für $k = 3$ an.

(Bitte einen Ausdruck der Routine `romberg` und das Ergebnis abgeben.)