Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt
Dipl.–Ing. C. Schröder

Wintersemester 07/08

6. Übungsblatt zur VL "Numerik für Informatiker"

(Iterative Lösung linearer und nichtlinearer Gleichungssysteme)

1. Aufgabe (7 Punkte)

$$\text{Sei } A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 10 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 9 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 11 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Gebe die exakte Lösung x an.
b) Berechne die ersten 4 Iterierten $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$ der Jacobi-Iteration für $Ax = b$.
c) Berechne die 1-Norm und die ∞-Norm der Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens.
d) Berechne die ersten 4 Iterierten $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$ der Gauß-Seidel-Iteration für $Ax = b$.
e) Berechne die 1-Norm und die ∞-Norm der Iterationsmatrix des Gauß-Seidel-Verfahrens.
Hinweise: Bei a) braucht die Lösung nur hingeschrieben werden;
bei b) und d) soll mindestens der Vektor $x^{(1)}$ per Hand ausgerechnet werden. Die restlichen Iterierten können auch per Rechner berechnet werden.
Eine Iteration beinhaltet einen Update jeder Variablen.
Das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren kann man als Fixpunktiteration $x^{(i+1)} = F(x^{(i)}) = Bx^{(i)} + b$ auffassen. Die Matrix B heisst Iterationsmatrix.
In MATLAB sind die Befehle `diag, triu, tril,` \ für diese Aufgabe hilfreich.

2. Aufgabe (2 Punkte)

Gegeben: A, b wie in der 1. Aufgabe. Die 2-Norm der Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens beträgt 0.705.
Folgende Werte wurden ausgehend von $x^{(0)}$ berechnet:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}, x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.0000 \\ -2.6000 \\ 2.0000 \\ -2.2727 \end{bmatrix}, x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.1475 \\ 1.4545 \\ -0.4586 \\ -0.6182 \end{bmatrix}, x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.6076 \\ 1.1335 \\ 1.3490 \\ 1.6141 \end{bmatrix}, x^{(4)} = \begin{bmatrix} 1.0922 \\ 1.0298 \\ 1.0783 \\ 1.0165 \end{bmatrix}$$

Gebe mit Hilfe dieser Daten eine a-priori und eine a-posteriori Schranke für den Fehler $\|x^{(4)} - x\|_2$ von $x^{(4)}$ an.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Wie viele Flops braucht eine Iteration des Gauß-Seidel- und des Jacobi-Verfahrens?
Hinweis: Gesucht sind nur die Ordnung p und die führende Konstante c, also ein Ausdruck der Form $cn^p + \mathcal{O}(n^{p-1})$. Mit Begründung.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \sin(x_1) + 2x_1x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{bmatrix}$.

a) Berechne die Jacobimatrix J von f, also eine Matrix voller Funktionen mit $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.
b) Berechne die ersten 4 Iterierten $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$ des Newton-Verfahrens mit Startwert $x^{(0)} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ für das Nullstellenproblem $f(x_1, x_2) = 0$.
Hinweis: Aufgabe a) soll per Hand gemacht werden. Bei Aufgabe b) hätte ich gerne die Berechnungsvorschrift gesehen. Die eigentlichen Vektoren können per Programm berechnet werden.

5. Aufgabe (3 Punkte)

Wahr oder falsch (ohne Begründung; Antwort richtig: 0.5 Punkte, falsch: -0.5 Punkte)
Sei B die Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens.

a) Das Jacobi-Verfahren konvergiert für jede Matrix und jeden Startwert.

b) Wenn die 1-Norm von B kleiner als 1 ist, dann konvergiert das Jacobi-Verfahren.

c) Wenn die ∞-Norm von B kleiner als 1 ist, dann konvergiert das Jacobi-Verfahren.

d) Wenn die 1-Norm und die ∞-Norm von B kleiner als 1 sind, dann konvergiert das Jacobi-Verfahren.

e) Wenn die 1-Norm kleiner als 1 ist und die ∞-Norm von B größer als 1 sind, dann konvergiert das Jacobi-Verfahren.

f) Wenn die ∞-Norm kleiner als 1 ist und die 1-Norm von B größer als 1 sind, dann konvergiert das Jacobi-Verfahren.

Abgabe - in der Vorlesung am 30. November oder
- vorher im Briefkasten zwischen den Räumen MA470, MA471

Besprechung im Tutorium am 3. Dezember