Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt
Dipl.–Ing. C. Schröder

Wintersemester 07/08

8. Übungsblatt zur VL "Numerik für Informatiker"

(Splines, Bezierkurven)

1. Aufgabe (9 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ erfüllt die Wertepaare:

x_i	-3	-1	0	1	3
f_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

a) Berechne die dividierten Differenzen von (x_i, f_i) (das ganze Dreiecksschema) und gebe die Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms $p(x)$ an.
b) Stelle das Gleichungssystem für die Momente des natürlichen Splines auf. Gebe die Momente an.
c) Berechnen Sie die Splinefunktion $s(x)$. (also die (ausmultiplizierten) Polynome der einzelnen Abschnitte)
d) Werten Sie $f(x), p(x), s(x)$ an den Stellen $-3.0; -2.9; -2.8; -2.7; \ldots 2.9; 3.0$ aus und plotten Sie die drei Kurven in ein Koordinatensystem. (Die Funktionswerte müssen nicht angegeben werden, der Ausdruck reicht. Plotten geht einfach mit dem MATLAB-Befehl `plot`; eine Alternative ist z.B. das Programm GNUPLOT.)

2. Aufgabe (3 Punkte)

Wieviele Flops benötigt die Berechnung des natürlichen Splines zu $n + 1$ Wertepaaren? (Ordnung p in $\mathcal{O}(n^p)$ reicht.) Begründe.

3. Aufgabe (5 Punkte)

a) Gebe das Bezier-Polynom $p(t)$ zu den Bezier-Punkten $(0, 1), (\frac{1}{4}, -2), (\frac{1}{2}, -1), (\frac{3}{4}, 2), (1, 2)$ in Bezier-Darstellung und ausmultipliziert an.
b) Berechne die Funktionswerte $p(t)$ für $t \in \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$ mit dem Algorithmus von de Casteljau. (Hier will ich die Dreiecksschemen sehen.)

4. Aufgabe (3 Punkte)

Wahr oder falsch (ohne Begründung; Antwort richtig: 0.5 Punkte, falsch: -0.5 Punkte)

a) Der Wert einer Splinefunktion für die Wertepaare $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$ hängt im Intervall (x_i, x_{i+1}) nur von den Wertepaaren $(x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}), (x_{i+2}, f_{i+2})$ ab. (Fachbegriff: lokale Abhängigkeit der Funktion)

b) Um einen periodischen Spline zu den Wertepaaren $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$ aufstellen zu können, muß $x_n = x_0$ und $f_n = f_0$ gelten.

c) Sei $p(x)$ das Interpolationspolynom zu den Wertepaaren (x_i, y_i). Dann gilt $p(x_i) = y_i$ für alle i.

d) Sei $s(x)$ der natürliche Spline zu den Wertepaaren (x_i, y_i). Dann gilt $s(x_i) = y_i$ für alle i.

e) Sei $b(x)$ das Bezierpolynom zu den Wertepaaren (x_i, y_i). Dann gilt $b(x_i) = y_i$ für alle i.

f) Wenn die Bezier-Darstellung eines Polynoms $p(x)$ genau einen von Null verschiedenen Koeffizienten enthält, der exakt eins ist, so ist p ein Bernstein-Polynom.

Abgabe - in der Vorlesung am 14. Dezember oder
- vorher im Briefkasten zwischen den Räumen MA470, MA471

Besprechung im Tutorium am 17. Dezember