Technische Universität Berlin
Fakultät II; Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt/Dipl.-Ing. C. Schröder

Wintersemester 2007/2008

01.02.2008

Probeklausur zur LV Numerik für Informatiker

BITTE DIESE FELDER IN DRUCKSCHRIFT AUSFÜLLEN:

Name:		Vorname:	
Matrikel-Nr.:		Studiengang:	

Mit der Veröffentlichung des Ergebnisses meiner Klausur (Matrikel-Nr., Punktzahl und Note) auf der Webseite zur Veranstaltung bin ich

☐ einverstanden.

☐ nicht einverstanden.

Bitte ankreuzen!

WICHTIGE HINWEISE:

- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt und unterschrieben zusammen mit den Lösungen abzugeben. Lösungen ohne Deckblatt oder nur mit teilweise ausgefülltem Deckblatt werden **NICHT** berücksichtigt.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - Ein DinA4-Zettel.
  - Ein nicht-programmierbarer Taschenrechner.
- **Nicht** zugelassen ist die Benutzung eines Laptops oder eines Handys!
- Mit **Bleistift** geschriebene Klausuren werden **nicht** gewertet!
- Das Ergebnis jeder (Teil-)Aufgabe ist **deutlich** zu notieren. Abzugeben sind die Lösungen **mit** allen benötigten Nebenrechnungen und Herleitungen in **Reinschrift**! Unleserliche Rechnungen werden **nicht** gewertet.
- Bei **jedem** Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden!
- Bitte den Studierendenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereit halten!
- Die Ergebnisse der Klausur und der Termin zur Klausureinsicht werden auf der Webseite zur Veranstaltung bekanntgegeben.
- Das Lösen der Zusatzaufgabe (4 Punkte) ist freiwillig. Sie kann zusätzlich oder statt einer der anderen Aufgabe gelöst werden.
- Es gibt insgesamt 50 Punkte und für die Bearbeitung der Klausur haben Sie 90 Minuten Zeit.

Ich bestätige, dass alle von mir gemachten Angaben der Wahrheit entsprechen und ich obige Hinweise verstanden und akzeptiert habe.

Unterschrift: ....

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	Z	Summe	Note
Punkte							
Korrektor							

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

a) Nennen Sie die Voraussetzungen für die Existenz einer Cholesky-Zerlegung einer allgemeinen Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und prüfen Sie, ob A diese Voraussetzungen erfüllt. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Cholesky-Zerlegung von A. **8 Pkt**

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der im Teil a) errechneten Cholesky-Zerlegung von A. **4 Pkt.**

c) Nennen Sie einen wichtigen Vorteil der Cholesky-Zerlegung gegenüber der LR-Zerlegung. **1 Pkt**

d) Sind folgende Aussagen korrekt?

1) Ist die Determinante einer symmetrischen Matrix positiv, so ist die Matrix positiv definit.
2) Ist eine symmetrische Matrix positiv definit, so sind alle Diagonalelemente positiv.

2 Pkt

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 1-c & 1 \\ 1+c & 1 \end{bmatrix}$$

gegeben.

a) Erläutern Sie den Begriff *Kondition einer Matrix*. **1 Pkt**

b) Geben Sie die Definition der Spaltensummennorm an. **2 Pkt.**

c) Für welches $c \in \mathbb{R}$ wird die Matrix A singulär? Bestimmen Sie für alle anderen $c \in \mathbb{R}$ die Inverse zu A. **5 Pkte**

d) Bestimmen Sie die Kondition der Matrix A bezüglich der Spaltensummennorm für die Fälle $0 < c < 1$, $c = 1$ und $c > 1$. **6 Pkt**

e) Für welche $c > 0$ wird bei Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ein relativer Fehler in b (bzgl. der Spaltensummennorm) um nicht mehr als den Faktor 10 verstärkt? **1 Pkt**

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ soll im Intervall $[1, 3]$ interpoliert werden.

a) Man bestimme das interpolierende Polynom p zu den Stützstellen 1, 2 und 3 und gebe es in der Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots \qquad \text{an.}$$

6 Pkt.

b) Mit Hilfe von p bestimme man eine Näherung für $\int_1^3 f(x)dx$ und vergleiche mit dem exakten Wert. **4 Pkt.**

Aufgabe 4 (2 Punkte)

In einem Experiment wurden die Werte

$$(0, 0.2), \quad (1, 2.9), \quad (2, 5), \quad (3, 5.5), \quad (4, 8.9)$$

gemessen. Es wird ein linearer Zusammenhang zwischen x und y vermutet.
Formen Siedas Problem in ein lineares Ausgleichsproblem um.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Approximieren Sie $f'(2)$ von $f(x) = \frac{2x}{3x+5}$ mit der Regel den forwärtsgenommenen Differenzenquotient $D_1 f$ für Schrittweiten $h = 1, 0.5$. Führen Sie eine h-Extrapolation durch, um die Ergebnisse zu verbessern.

Zusatzaufgabe (4 Punkte)

Erläutern Sie das eindimensionale Newton-Verfahren graphisch. **4 Pkt.**