Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt
Dipl.–Ing. C. Schröder

Wintersemester 07/08

12. Übungsblatt zur VL "Numerik für Informatiker"
(Numerische Integration II)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Leiten Sie die offene Newton-Cotes-Formel mit 3 Knoten für das Intervall $[-1, 1]$ her.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Verwenden Sie die Gauß-Quadraturformel mit 3 Knoten, um folgende Integrale anzunähern. Geben Sie außerdem Fehlerabschätzungen an. Bestimmen Sie dann den exakten Wert und geben sie die wahren Fehler an.
a) $\int_{-1}^{1} 2x^2 - 8\mathrm{d}x$ b) $\int_{-1}^{1} \sin(\frac{x}{2})\mathrm{d}x$ c) $\int_{-1}^{1} 3x^3 + 2x^2 - 5\mathrm{d}x$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Approximieren Sie $\int_{1}^{3} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ mit der summierten Trapezregel, und zwar mit $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$, $n = 8$ und verbessern Sie die so gewonnenen Werte mittels Romberg-Extrapolation.

4. Aufgabe (2 Punkte)

Wahr oder falsch (ohne Begründung; Antwort richtig: 0.5 Punkte, falsch: -0.5 Punkte)

a) Die Simpsonregel braucht genausoviele Funktionsauswertungen wie die 3-Knoten-Gauß-Formel.

b) Die summierte Simpsonregel braucht genausoviele Funktionsauswertungen wie die summierte 3-Knoten-Gauß-Formel.

c) Romberg-Extrapolation braucht extra Funktionsauswertungen.

d) Die Gewichte der Newon-Cotes-Formeln können, im Gegensatz zu den Gauß-Formeln, negativ werden, wodurch Auslöschungsfehler möglich sind.

Achtung: Praktische Aufgabe auf der Rückseite!

Abgabe - in der Vorlesung am 1. Februar oder
- vorher im Briefkasten zwischen den Räumen MA470, MA471

Besprechung im Tutorium am 4. Februar

Praktische Aufgabe (10 Punkte)

Implementieren Sie das Romberg-Verfahren zur Approximation von $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$.
Schreiben Sie dazu eine Routine `romberg` mit folgenden Parametern: die Grenzen a, b, den Integer $k \geq 1$ und das Fließkommazahlen-Array F der Länge $2^k + 1$ mit $F = [f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{2^k})]$ wobei $x_i = a + i\frac{b-a}{2^k}$. Als Ergebnis soll die Romberg-Extrapolation der summierten Trapezregel geliefert werden.
Wenden Sie Ihre Routine auf $\int_2^4 x^{-1} \mathrm{d}x$ für $k = 3$ an.
(Bitte einen Ausdruck der Routine `romberg` und das Ergebnis abgeben.)