Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt
Dipl.–Ing. C. Schröder

Wintersemester 07/08

3. Übungsblatt zur VL "Numerik für Informatiker"
(Numerische Lösung von Nullstellenproblemen)

1. Aufgabe (7 Punkte)

a) Ist der Fixpunkt $\bar{x} = 0.8789$ der Iteration $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n - 0.2}$ anziehend oder abstoßend?
b) Finden Sie ein Intervall $[a, b]$ und eine Konstante $\alpha < 1$, so daß die Vorraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes für die Fixpunktiteration aus Aufgabe 1a) erfüllt sind.
c) Wieviele Iterationen sind a-priori notwendig, um ausgehend vom Startwert $x_0 = 0.7$ eine Näherung mit einem absoluten Fehler von 10^{-5} zu erhalten?
d) Schätzen Sie den absoluten Fehler von x_{14} a-posteriori ab.

2. Aufgabe (3 Punkte)

Welche der folgenden Fixpunktiterationen wird schneller konvergieren und warum?
$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n - 0.2}, x_0 = 0.7$ oder $x_{n+1} = x_n^3 - 0.2, x_0 = 0$

3. Aufgabe (7 Punkte)

Gesucht ist die Nullstelle der Funktion $f(x) = \arctan(x)$ in $[-1, 1.5]$. Hinweis: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
a) Benutzen Sie das Bisektionsverfahren mit den Startwerten -1 und 1.5, das Newtonverfahren mit Startwert -1 und das Newtonverfahren mit Startwert 1.5. Was beobachten Sie?
b) Man kann zeigen, daß es einen Wert α gibt, so daß das Newtonverfahren für jeden Startwert $|x_0| < \alpha$ konvergiert, aber für jeden Startwert $|x_0| > \alpha$ divergiert. Finden Sie eine Funktion, die den Wert α als Nullstelle hat.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Wahr oder falsch?
a) Wenn eine Funktion f nirgendwo in $[a, b]$ einen Vorzeichenwechsel aufweist, so folgt aus dem Zwischenwertsatz, daß sie dort auch keine Nullstelle hat.
b) Wenn $f(\tilde{x})$ sehr klein ist, dann hat f eine Nullstelle in der Nähe von $\tilde{x}$.
c) Wenn das Newtonverfahren konvergiert, dann ist es schneller, als das Bisektionsverfahren.

Achtung: Praktische Aufgabe auf der Rückseite!

Abgabe - in der Vorlesung am 9. November oder
- vorher im Briefkasten zwischen den Räumen MA470, MA471

Besprechung im Tutorium am 12. November

Praktische Aufgabe (10 Punkte)

Ein Problem aus dem Finanzwesen: Ein Venture-Capital-Geber investierte im Jahr 2000 in ein kleines Start-up 1 Mio Euro (eigentlich 1,95... Mio DMark), 2002 nochmal 2 Mio Euro, 2003 1.5 Mio Euro, 2006 1 Mio Euro und verkaufte schließlich 2007 alle Anteile an der Firma für 9 Mio Euro, jeweils am 1. Januar.
Angenommen, der Geldgeber hätte seine Gelder statt in das Start-up zu stecken, auf der Bank zu festen Zinsen angelegt (für alle Anlagen gleicher, konstanter Zinssatz, jährliche Verzinsung, mit Zinseszins), wie hoch müßte der Zinssatz sein, damit am Ende das gleiche Geld rausgekommen wäre?
(Hinweis: die Funktion $f(x) = x^7 + 2x^5 + 1.5x^4 + x - 9$ spielt dabei eine Rolle.)
a) Überlegen Sie sich einen Test, der für eine Näherung $\tilde{x}$ und eine Schranke ϵ prüft, ob die Funktion eine Nullstelle in $[\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$ hat.
b) Implementieren Sie das Bisektionsverfahren, das Sekantenverfahren und das Newtonverfahren für dieses Problem, um den gesuchten Wert mit vorgegebenen Startwerten und absoluten Fehler zu bestimmen.
(Hinweis: Der gesuchte Wert liegt zwischen 1% und 20%.)