Technische Universität Berlin Wintersemester 07/08
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt
Dipl.–Ing. C. Schröder

5. Übungsblatt zur VL "Numerik für Informatiker"

(Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme: Householder-Transformation und QR-Zerlegung)

1. Aufgabe (4 Punkte)

a) Es seien eine $n \times n$ Matrix A sowie ihre LR-Faktoren L (untere Dreiecksmatrix, Einsen auf der Diagonale) und R (obere Dreiecksmatrix, keine Null auf der Diagonale) gegeben. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der die LR-Zerlegung von $A^\top$ in $\mathcal{O}(n^2)$ Flops berechnet. (Gefragt ist Code einer konkreten Programmiersprache oder Pseudocode.) Hinweis: Input der Routine sind L und R (und n). Output sind $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$, die LR-Faktoren von $A^\top$.
b) Finde eine LR-Zerlegung von $A^\top$, wobei

$$A := LR, \quad L := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Aufgabe (3 Punkte)

a) Beweisen Sie, daß es zu jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ eine Zahl τ gibt, so daß die Matrix $H = I - \tau v v^\top$ orthogonal ist. Hinweis: $v^\top v = \|v\|_2^2$.
b) Geben Sie so eine Zahl τ für folgende Vektoren an:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \pi \\ \pi^2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

a) Gegeben sind 2 Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gleicher 2-Norm. Finde einen Vektor v und eine Zahl τ, so daß $(I - \tau v v^\top)x = y$.
b) Geben Sie solche v und τ für folgende x, y an:

$$[x_1, y_1] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, [x_2, y_2] = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{30} \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, [x_3, y_3] = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{30} \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, [x_4, y_4] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

4. Aufgabe (5 Punkte)

a) Berechnen Sie die 1-, 2- und ∞-Normen der Vektoren v_1, v_3 und v_4 der 2. Aufgabe!
b) Berechnen Sie die 1- und ∞-Normen sowie die jeweiligen Konditionszahlen der Matrizen L und R der 1. Aufgabe! (Hier ist nach 8 Zahlen gefragt.)

5. Aufgabe (4 Punkte)

Wahr oder falsch (ohne Begründung; Antwort richtig: 0.5 Punkte, falsch: -0.5 Punkte)

a) Für jede 2 Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine Householdermatrix H, so daß $Hx = y$.

b) Für jede 2 Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine Householdermatrix H und eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß $Hx = \alpha y$.

c) Für jede 2 Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine Householdermatrix H und eine Zahl $\alpha > 0$, so daß $Hx = \alpha y$.

Falls $A = QR$ eine QR-Zerlegung der invertierbaren Matrix A ist, dann

d) ist QR^T eine QR-Zerlegung von A^T.

e) ist QR^{-1} eine QR-Zerlegung von A^{-1}.

f) ist QR^{-T} eine QR-Zerlegung von A^{-T}.

g) Wenn Q orthogonal ist, dann ist $Q^TQ = QQ^T$.

h) Wenn $Q^TQ = QQ^T$, dann ist Q orthogonal.

Praktische Aufgabe (10 Punkte)

Implementieren Sie die QR-Zerlegung in folgenden Schritten.
a) Schreiben Sie eine Routine `house`, die einen Vektor x als Parameter bekommt, und einen Vektor v und ein Skalar τ berechnet, so daß $v(1) = 1$, $(I - \tau vv^\top)$ eine orthogonale Matrix ist und $(I - \tau vv^\top)x$ ein Vielfaches des ersten Einheitsvektors.
b) Schreiben Sie eine Routine `apply_house`, die ein Skalar τ und Vektoren v und y als Parameter bekommt, und $z = (I - \tau vv^\top)y$ berechnet. Sie können annehmen, daß $v(1) = 1$. Konzipieren Sie die Routine so, daß sie ohne lokale Arrays auskommt. Bilden Sie insbesondere nicht die Matrix $(I - \tau vv^\top)$.
c) Schreiben Sie eine Routine `qr_inplace`, die eine $n \times n$ Matrix A bekommt und eine gleichgroße Matrix B und einen Vektor t zurückliefert, so daß der obere dreieckige Teil von B der oberen Dreiecksmatrix R der QR-Zerlegung von A entspricht. Die Spalten von B unterhalb der Diagonalen enthalten die Householdervektoren v. Der Vektor t enthält die Skalare τ.
d) Schreiben Sie eine Routine `lgs_solve_qr`, die eine $n \times n$ Matrix A und einen Vektor b bekommt und die Lösung x des Gleichungssystems $Ax = b$ mittels QR-Zerlegung berechnet.
e) Schreiben Sie eine Routine `qr_generate`, die eine Matrix B und einen Vektor t, wie in c) berechnet, bekommt und die orthogonale Matrix Q der QR-Zerlegung ausgibt.
Für diese Aufgabe eignen sich Sprachen wie C oder Matlab gut.

Abgabe - in der Vorlesung am 23. November oder
- vorher im Briefkasten zwischen den Räumen MA470, MA471

Besprechung im Tutorium am 26. November