Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt
Dipl.–Ing. C. Schröder

Wintersemester 07/08

7. Übungsblatt zur VL "Numerik für Informatiker"

(Polynominterpolation)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Gesucht ist das Polynom $p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ minimalen Grades, das folgende Bedingungen erfüllt $p(x_i) = f_i$, wobei

x_i	-1	1	2	4
f_i	0	4	15	85

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem dessen Lösung der Vektor der Polynomkoeffizienten $[\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0]^\top$ ist. Lösen Sie es und geben Sie das Interpolationspolynom an.
b) Geben Sie die Lagrange-Darstellung an

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_i(x), \quad \text{wobei } \ell_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Vereinfachen Sie die Polynome $\ell_i(x)$ soweit, dass Sie die Form z.B. $\ell_i(x) = \frac{(x-1)(x-5)(x+12.5)}{23}$ besitzen. (Die Zahlen und deren Anzahl sind ausgedacht).
Hinweis: Aufgabe b) erfordert fast kein Rechnen.

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) Berechnen Sie per Hand die dividierten Differenzen folgender Wertepaare:
a.1) die Paare aus der 1. Aufgabe,
a.2)

x_i	-1	0	2
f_i	-3	-2	36

a.3)

x_i	1	-2	-1	0	2
f_i	1	16	-3	-2	36

Hinweis: Bei Aufgabe a.3) kann man von einer vorherigen Aufgabe profitieren. Dies ist als Übung für die Praktische Aufgabe gedacht.
b) Geben Sie Newtonform der Interpolationspolynome an.
c) Werten Sie folgendes in Newtonform gegebenes Polynom mittels Horner Schema an der Stelle $x = 0.5$ aus!

$$p(x) = 2 + 3(x-1) + (x-1)(x+2) - 4(x-1)(x+2)x + 2(x-1)(x+2)x(x-2)$$

3. Aufgabe (5 Punkte)

Angenommen die Funktion $f(x) = \sin(x)$ wurde an den Stellen $x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ausgewertet, dann aus den entstandenen Wertepaaren das Interpolationspolynom $p(x)$ gebildet, welches schließlich an der Stelle $x = 2.5$ ausgewertet wurde.

Gilt die Abschätzung $|p(2.5) - \sin(2.5)| \leq 5 \cdot 10^{-3}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Aufgabe (2 Punkte)

Wahr oder falsch (ohne Begründung; Antwort richtig: 0.5 Punkte, falsch: -0.5 Punkte)

a) Die Auswertung eines Polynoms in Lagrangedarstellung benötigt $\mathcal{O}(n)$ Flops.

b) Die Auswertung eines Polynoms in Newtonform benötigt $\mathcal{O}(n^2)$ Flops.

c) Jedes Polynom $p(x)$ vom Grad n kann als Produkt von n linearen Faktoren (den evtl. komplexen Nullstellen) geschrieben werden.

d) Das Horner-Schema ist speziell geeignet für die Lagrangedarstellung des Interpolationspolynoms.

Praktische Aufgabe (10 Punkte)

a) Schreiben Sie eine Routine `divdiff`, die zwei gleichlange Vektoren $x = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ und $f = [f_0, f_1, \ldots, f_n]$ bekommt, wobei f_i den Funktionswert $f(x_i)$ einer Funktion an der Stelle x_i enthält. Die Routine überschreibt f mit den dividierten Differenzen wie folgt: $f_i \leftarrow f[x_0, \ldots, x_i]$. Implementieren Sie die Routine inplace und ohne lokale Arrays. Die Routine sollte eine Komplexität von $\mathcal{O}(n^2)$ haben und eine Fehlermeldung ausgeben, falls x zwei gleiche Elemente enthält.
Hinweis: x bleibt konstant; im Wesentlichen besteht die Routine aus zwei geschachtelten for-Schleifen.
b) Schreiben Sie eine Routine `horner`, die zwei gleichlange Vektoren $x = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ und $f = [f_0, f_1, \ldots, f_n]$, wie von Aufgabe a) berechnet, und eine Zahl a bekommt und das Interpolationspolynom an der Stelle a auswertet. Implementieren Sie die Routine ohne lokale Arrays.
Hinweis: x, f bleiben konstant; im Wesentlichen besteht die Routine aus einer for-Schleife.
c) Schreiben Sie eine Routine `divdiff2`, die zwei Vektoren x, f der Länge $n+1$ sowie eine Zahl $0 \leq m \leq n$ entgegennimmt. An Stelle f_i steht der Funktionswert $f(x_i)$ einer Funktion an der Stelle x_i, falls $0 \leq i \leq m$ und die dividierte Differenz $f[x_m, x_{m+1}, \ldots, x_i]$, falls $m < i \leq n$.
Die Routine überschreibt f_i mit $f_i \leftarrow f[x_0, \ldots, x_i]$ und soll eine Komplexität von $\mathcal{O}(mn)$ haben.
Hinweis: Aufgabe a) kann als Spezialfall von c) für $m = n$ verstanden werden. Für diese Aufgabe eignen sich Sprachen, die die Vektorindizierung bei Null beginnen. Ansonsten müssen alle Indizes um 1 geshiftet werden.

Abgabe - in der Vorlesung am 7. Dezember oder
- vorher im Briefkasten zwischen den Räumen MA470, MA471
Besprechung im Tutorium am 10. Dezember