Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt
Dipl.–Ing. C. Schröder

Wintersemester 07/08

9. Übungsblatt zur VL "Numerik für Informatiker"

(Ausgleichsrechnung)

1. Aufgabe (3 Punkte)

Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10^{-10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10^{-10} \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

a) Gebe eine QR-Zerlegung von A an.

Berechne die Lösungen x_1, x_2 der Ausgleichsprobleme $\|Ax_i - b_i\| = \min$ in 16-stelliger Arithmetik mittels
b) Normalengleichungen.
c) QR-Zerlegung.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Berechnen Sie die Ausgleichsgeraden zu den Wertepaaren

a)

x_i	1	2	3	5
y_i	4.1	5.9	8.1	11

b)

x_i	2	4	5	6
y_i	8.1	5.9	5.1	4.1

c)

x_i	2	4	5	6
y_i	1	9	11	14

.

Lösen Sie die entstehenden linearen Ausgleichsprobleme mittels QR-Zerlegung.
Hinweis: Bei c) kann man von b) profitieren.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Es soll die Funktion der Form $f_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(x) = \lambda_1 x + \lambda_2\sqrt{x+1} + \lambda_3(x-5)^2$ bestimmt werden, die die Wertepaare

x_i	1	2	3	5	5.5	6	6.5	7	8
y_i	16.5	11	8	7.5	8.5	10	12.5	15	22

am besten approximiert im Sinne der Summe der kleinsten Fehlerquadrate. Bestimmen Sie dazu Matrix A und rechte Seite b des linearen Ausgleichsproblems. Berechne (nicht notwendigerweise per Hand, sondern z.B. mit Matlabs `qr` Befehl) eine QR-Zerlegung von $[A|b]$ und gebe R an. Berechne aus R die optimalen Werte für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Es soll die Funktion der Form $f_{\lambda_1,\lambda_2}(x) = e^{\lambda_1 x + \lambda_2}$ bestimmt werden, die die Wertepaare

x_i	0	1	2	3	4
y_i	3	1	0.5	0.2	0.05

am besten approximiert im Sinne der Summe der kleinsten Fehlerquadrate.
a) Schreiben Sie das Ausgleichsproblem als Quadratmittelproblem um. Geben Sie also eine Funktion $F(\lambda)$ an, für die das Problem die Form $\|F(\lambda)\|_2^2 = \min$ annimmt.
b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $DF(\lambda)$.

c). Bestimmen Sie Matrix und rechte Seite des linearen Ausgleichsproblems das im ersten Schritt des Gauß-Newton-Verfahrens zum Startvektor $\lambda^{(0)} = \left[\begin{smallmatrix}1\\-1.5\end{smallmatrix}\right]$ gelöst wird. (Nach der eigentlichen Lösung ist nicht gefragt.)
d) Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems in c) lautet $\left[\begin{smallmatrix}1.99\\1.892\end{smallmatrix}\right]$. Geben Sie die Iterationsvorschriften und die ersten Iterierten des Gauß-Newton-Verfahrens und des gedämpften Gauß-Newton-Verfahrens an.

5. Aufgabe (2 Punkte)

Wahr oder falsch (ohne Begründung; Antwort richtig: 0.5 Punkte, falsch: −0.5 Punkte)

a) In exakter Arithmetik liefern Normalengleichungen und QR-Zerlegung immer dasselbe Ergebnis eine linearen Ausgleichsproblems.

b) In endlicher Arithmetik sollte man die QR-Zerlegung der Normalengleichungen vorziehen, da die Matrix $A^\top A$ wesentlich mehr Speicherplatz benötigt, als Q und R zusammen.

Außer den Größenunterschieden gibt es auch Unterschiede in der Genauigkeit. Sei n_{data} die Anzahl der korrekten Nachkommastellen von A und b. Sei n_{QR} und n_{A^TA} die Anzahl der korrekten Nachkommastellen der Lösung x, berechnet mittels QR-Zerlegung, bzw. Normalengleichung. Es gelten die Daumenregeln:

c) Die QR-Lösung ist doppelt so genau, wie die Normalengleichungslösung, aber hoechstens so genau, wie die Eingangsdaten $n_{QR} = \min(2n_{A^TA}, n_{data})$.

d) Die QR-Lösung verliert halb soviele Stellen, wie die Normalengleichungslösung, $n_{data} - n_{QR} = \frac{1}{2}(n_{data} - n_{A^TA})$.

Praktische Aufgabe (10 Punkte)

a) Modifizieren Sie die Routine `qr_inplace` von Blatt 5 (entweder Ihre Lösung oder die Musterlösung unter `http://www.math.tu-berlin.de/~ehrhardt/NumInf/UE.html`) so dass auch rechteckige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ behandelt werden koennen. Sie können annehmen, daß die ersten $\min(m, n)$ Spalten von A linear unabhängig sind.
b) Schreiben Sie eine Routine `linearLeastSquares`, die für eine rechteckige Matrix A und eine rechte Seite b die Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\|b - Ax\|_2 = \min$ berechnet. Die Routine sollte den dreieckigen Faktor R der QR-Zerlegung von $[A|b]$ benutzen. (entweder a) oder Matlabs `qr`.
c) Implementieren Sie die gedämpfte Gauss-Newton-Methode für das Problem aus Aufgabe 4. Benutzen Sie Ihre Routine `linearLeastSquares` aus Aufgabe b) für die auftretenden linearen Ausgleichsprobleme.

Abgabe - in der Vorlesung am 21. Dezember oder
- vorher im Briefkasten zwischen den Räumen MA470, MA471
Besprechung im Tutorium am 7. Januar