

Skript

Numerik partieller Differentialgleichungen

Anton Arnold, Uni Münster, SS 2002, WS 2004/05

Matthias Ehrhardt, Uni Saarbrücken, WS 2001/02

Sergej Rjasanow, Uni Saarbrücken, WS 1999/00

Stand: 16. Februar 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Definitionen, Beispiele	5
1.2	Typeneinteilung bei Gleichungen zweiter Ordnung	8
1.3	Typeneinteilung bei Systemen erster Ordnung	10
2	Differenzverfahren für parabolische Probleme	13
2.1	Mathematische Modelle	13
2.2	Differenzverfahren für eindimensionale parabolische Aufgaben	15
2.3	Stabilität und Konvergenz in l^2	20
2.4	Tridiagonale Gleichungssysteme	25
2.5	Stabilität und Konvergenz in der diskreten Maximumnorm	27
2.6	mehrdimensionale Probleme	30
3	Differenzverfahren für elliptische Probleme	33
3.1	Mathematische Modelle	33
3.2	Differenzenapproximation des Laplace-Operators	36
3.3	Die Dirichlet-Aufgabe in 2D	37
3.4	Das diskrete Maximumprinzip	38
3.5	Stabilität und Konvergenz	43
3.6	Die Dirichlet-Aufgabe im Rechteck	45
3.7	Diskretisierungen höherer Ordnung	49
4	Eine Einführung in die Theorie der Sobolev-Räume	57
4.1	Die verallgemeinerte Ableitung	57
4.2	Die Sobolev-Räume $W^{k,p}(\Omega)$	60
4.3	Verallgemeinerte Randfunktion	62
4.4	Satz über äquivalente Normierungen	64
4.5	Einige Ungleichungen in Sobolev-Räumen	65
4.6	Die Formel der partiellen Integration	67
4.7	Einbettungssätze und Sobolev-Ungleichung	69
5	Variationsformulierung von Randwertproblemen	73
5.1	Bilinearformen, lineare Funktionale	73
5.2	Variationsformulierungen	78
5.3	Beispiele elliptischer Variationsformulierungen	85

6	Finite Elemente	89
6.1	Grundbegriffe, Definitionen	89
6.2	Dreieckselemente in \mathbb{R}^2	91
6.3	Tetraeder-Elemente im \mathbb{R}^3	93
6.4	Triangulierung für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$	94
6.5	Konvergenz konformer finiter Elemente	99
6.6	L^2 -Abschätzung für lineare Elemente	106
6.7	L^∞ -Abschätzung für lineare Elemente	107
7	Mehrgitterverfahren	111
7.1	Iterationsverfahren	111
7.2	Idee von Mehrgitterverfahren	114
7.3	Gitterabhängige Normen	115
7.4	Der Multigrid-Algorithmus	117
7.5	Die Konvergenz des W-Zyklus	123
7.6	Die Konvergenz des V-Zyklus	126
7.7	Die Konvergenz der „Full-Multigrid“-Methode	129
7.8	Numerischer Aufwand	130
8	Randelementmethoden (BEM)	133
8.1	Einleitung	133
8.2	BEM für 1D-Modellaufgabe	136
8.3	Formulierung von Randintegralgleichungen	138
8.4	Die hypersinguläre Gleichung im \mathbb{R}^2	139
8.5	Calderón-Projektor und Poincaré-Steklov-Operator	142
8.6	Die Methode der (naiven) Kollokation in 2D	143
8.7	Die Kollokationsmethode in 3D	147
8.8	Sobolev-Räume im \mathbb{R}^d	151
8.9	Sobolev-Räume mit nichtganzzahliger und negativer Ordnung	153
8.10	Sobolev-Räume auf Mannigfaltigkeiten	154
8.11	Eigenschaften von Randintegraloperatoren	156
8.12	Das Galerkin-Verfahren für das Dirichlet-Problem	158
A	Literaturverzeichnis	163
B	Folien	165

1 Einleitung

1.1 Definitionen, Beispiele

Fast alle physikalischen Größen hängen von Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 und der Zeit t ab.

Definition 1.1 (*partielle Differentialgleichung*)

Gleichungen, die die partiellen Ableitungen einer Funktion $u = u(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ enthalten, heißen *partielle Differentialgleichungen*:

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \dots) = 0$$

Die partiellen DGLn lassen sich nicht einheitlich analysieren. Man unterscheidet mehrere Typen von Gleichungen, die verschiedene Eigenschaften besitzen und auch unterschiedliche numerische Methoden erfordern.

Beispiel 1.1 (*part. DGL 1. Ordnung*)

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2) = 0$$

Offenbar muss $u(x_1, x_2)$ unabhängig von x_1 sein, d.h. die Lösung ist $u(x_1, x_2) = \varphi(x_2)$. Die Funktion $\varphi(x_2)$ ist beliebig!

Beispiel 1.2 (*lineare Transportgleichung, Advektionsgleichung*)

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0; \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(t, x) &= u_0(x - ct) \\ u_0(x) &\dots \text{Anfangsbedingung} \end{aligned}$$

Modell: gleichförmiger Transport; zB Partikel in gleichmäßiger Strömung

Beispiel 1.3 (*Laplace-Gleichung*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet.

Gesucht ist die Lösung von

$$\Delta u(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega.$$

Mögliche Lösungen sind:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= x_1 + x_2, \\ u(x_1, x_2) &= x_1^2 - x_2^2, \\ u(x_1, x_2) &= \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

Zur eindeutigen Festlegung der Lösung benötigt man die *Randbedingungen* auf dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$, zB. $u(x_1, x_2)|_{(x_1, x_2) \in \Gamma} = \varphi(x_1, x_2)$

Modell: stationäre Temp.-Verteilung in Ω , homog. Medium, keine Quellen

Beispiel 1.4 (*Wellen-Gleichung*)

Sei $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Gesucht ist die Lösung von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alle Lösungen sind gegeben durch

$$u(t, x) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

wobei f und g beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind.
Geeignete *Anfangswerte* sind z.B.

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \varphi(x) \\ u_t(0, x) &= \psi(x) \end{aligned}$$

Die Lösung lautet dann (*d' Alembert'sche Formel*)

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(z) dz.$$

Modell: Schwingung einer idealen Saite

Beispiel 1.5 (*Wärmeleitungsgleichung*)

Gesucht ist eine Lösung von

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Der Separationsansatz $u(t, x) = v(t) \cdot w(x)$ liefert eine Lösung:

$$u(t, x) = e^{-c^2 t} \cdot \sin cx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Weitere Lösungen durch Linearkombinationen:

$$u(t, x) = \sum_j \alpha_j e^{-c_j^2 t} \cdot \sin c_j x$$

Für $t > 0$ ist aber

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4t}} dz$$

(z.B. mit einer stetigen und beschränkten Funktion $u_0(x)$) ebenfalls eine Lösung, die sogar die *Anfangsbedingung*

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

erfüllt.

Modell: t -abhängige Temp.-Verteilung, Wärmeleitung

Beispiel 1.6 (*Stokes-Gleichungen*)

In dem System

$$\begin{cases} \operatorname{div} u(x_1, x_2) = 0, & u = (u_1, u_2)^T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \Delta u(x_1, x_2) + \nabla p(x_1, x_2) = 0, & p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

ist $u(x_1, x_2)$ die Strömungsgeschwindigkeit, während $p(x_1, x_2)$ den Druck bezeichnet.

Modell: stat. Strömung einer viskosen, inkompressiblen Flüssigkeit konstanter Dichte.

Beispiel 1.7 (*Euler-Gleichungen, nicht lin. System*)

Sei

$\rho(t, x)$ die Dichte
 $v(t, x)$ die Geschwindigkeit
 $E(t, x)$ die totale Energie
 $p(t, x)$ der Druck des Gases

Die (eindimensionalen) *Euler-Gleichungen* lauten:

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho v)_x &= 0 && \text{(Massengleichung)} \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x &= 0 && \text{(Impulsgleichung)} \\ E_t + (v(E + p))_x &= 0 && \text{(Energiegleichung)}\end{aligned}$$

Es gilt: $E = \frac{1}{2}\rho v^2 + e$, wobei e die innere (Rotations- bzw. Vibrations-) Energie bezeichnet.

Annahme: e ist eine gegebene Funktion der Dichte bzw. des Drucks:

$$e = e(\rho, p) \quad \text{(Zustandsgleichung)}$$

Schreibweise:

$$\begin{aligned}u &= (\rho, \rho v, E)^T : \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(u) &= (\rho v, \rho v^2 + p, v(E + p))^T\end{aligned}$$

Die Euler-Gleichungen sind dann

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

Modell: instat. Strömung einer kompressiblen, nicht-viskosen Flüssigkeit (bzw. Gas)

1.2 Typeneinteilung bei Gleichungen zweiter Ordnung

Grund: völlig unterschiedliche Eigenschaften

Die allgemeine *lineare* Differentialgleichung in zwei Variablen x und y lautet:

$$\underbrace{a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy}}_{\text{Hauptteil}} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u = g(x, y) \quad (1.1)$$

Definition 1.2

Die Gleichung (1.1) heißt

- a) *elliptisch* in (x, y) , falls $a(x, y)c(x, y) - b^2(x, y) > 0$
- b) *hyperbolisch* in (x, y) , falls $a(x, y)c(x, y) - b^2(x, y) < 0$
- c) *parabolisch* in (x, y) , falls $ac - b^2 = 0$ und

$$\text{rg} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \end{pmatrix} = 2 \quad \text{in} \quad (x, y).$$

- d) Die Gleichung (1.1) heißt elliptisch (hyperbolisch, parabolisch) in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, falls sie in allen Punkten $(x, y) \in \Omega$ elliptisch (hyperbolisch, parabolisch) ist.

Beispiel 1.8

- a) Laplace-Gleichung ist elliptisch: $a = c = 1, b = 0 \Rightarrow ac - b^2 = 1$
- b) Wellengleichung ist hyperbolisch: $a = 1, c = -1, b = 0 \Rightarrow ac - b^2 = -1$
- c) Wärmeleitungsgleichung ist parabolisch:

$$a = 1, b = c = d = 0, e = -1 \Rightarrow ac - b^2 = 0, \quad \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Verallgemeinerung:

Sei $u(x) = u(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}, a(x) \in \mathbb{R}^n, b(x) \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}$$

Die allgemeine lineare Dgl. zweiter Ordnung lautet

$$\underbrace{(A(x)\nabla, \nabla u)}_{\text{„Hauptteil“}} + (a(x), \nabla u) + b(x)u = f(x)$$

wobei $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$ ist.

O.B.d.A. sei $A(x) = A^T(x)$; d.h. alle Eigenwerte sind reell.

Definition 1.3

Diese Gleichung heißt in x

- a) elliptisch, falls $\lambda_j(A(x)) > 0 \ \forall j = 1, \dots, n$ oder $\lambda_j(A(x)) < 0 \ \forall j = 1, \dots, n$ ist.
(d.h. falls $A(x)$ positiv oder negativ definit ist)
- b) hyperbolisch, falls $n - 1$ Eigenwerte von $A(x)$ gleiches Vorzeichen besitzen, und ein Eigenwert das andere Vorzeichen hat.
- c) parabolisch, falls ein Eigenwert verschwindet, die übrigen $n - 1$ Eigenwerte das gleiche Vorzeichen besitzen und $\text{Rang}(A(x), a(x)) = n$, wobei $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))^T$.

Bemerkung: Es sind nicht alle Fälle abgedeckt. Die übrigen heißen ultrahyperbolisch und finden wenig Anwendung.

1.3 Typeneinteilung bei Systemen erster Ordnung

Gleichungen höherer Ordnung sind stets in Systeme 1. Ordnung transformierbar (vgl. Gew. DGL).

Sei $u(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion,
 $A(x, y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(x, y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f(x, y) \in \mathbb{R}^n$.

Ein allgemeines *lineares System 1. Ordnung* lautet:

$$\underbrace{u_x - A(x, y)u_y}_{\text{Hauptteil}} + B(x, y)u = f(x, y) \tag{1.2}$$

Bemerkung:

Anders als in Abschnitt 1.2 kann A nichtsymmetrisch sein und komplexe Eigenwerte besitzen!

Definition 1.4

$A(x, y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *reell-diagonalisierbar*, wenn die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reell sind, und eine Zerlegung $A = S^{-1}\Lambda S$ mit $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ existiert.

Definition 1.5

Das System (1.2) heißt in (x, y)

- a) hyperbolisch, falls $A(x, y)$ reell-diagonalisierbar ist.
- b) elliptisch, falls alle Eigenwerte von $A(x, y)$ nicht reell sind.

Bemerkung:

Falls A symmetrisch ist oder n verschiedene reelle Eigenwerte hat, ist das System hyperbolisch, da diese Bedingungen hinreichend für reelle Diagonalisierbarkeit sind. Insbesondere ist eine einzelne DGL 1. Ordnung stets hyperbolisch.

Beispiel 1.9 (*Cauchy-Riemann-Gleichungen*)

$$\begin{cases} w_x + v_y = 0 \\ w_y - v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow u = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow u_x = \begin{pmatrix} w_x \\ v_x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}_y = 0, \quad \text{d.h.}$$

$$A = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda_{1,2}(A) = \pm i \notin \mathbb{R}$$

Das System ist elliptisch:

$$\begin{cases} w_{xx} + v_{xy} = 0 \\ w_{yy} - v_{xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow w_{xx} + w_{yy} = 0 \quad \dots w \text{ harmonisch}$$

und

$$\begin{cases} w_{xy} + v_{yy} = 0 \\ w_{xy} - v_{xx} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_{yy} + v_{xx} = 0 \quad \dots v \text{ harmonisch}$$

Beispiel 1.10

Erfüllen w und v das System

$$\begin{cases} w_x + v_y = 0 \\ w + v_x = 0, \end{cases}$$

so löst v die Wärmeleitungsgleichung

$$v_{xx} = -w_x = v_y.$$

Das System ist weder elliptisch noch hyperbolisch:

$$u = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}_y + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = 0$$

Die Eigenwerte von $A = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind reell: $\lambda_{1,2} = 0$. A ist aber nicht diagonalisierbar!

Ref: [Ha1] §1

2 Differenzverfahren für parabolische Probleme

2.1 Mathematische Modelle

Typische physikalische Prozesse, die auf parabolische partielle Dgln führen, sind

Beispiel 2.1 Wärmeleitung

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + f \quad (2.1)$$

$u(x, t)$:	$[K]$	$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 1, 2, 3), t > 0$... Temperatur
c	:	$\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$	spezifische Wärme
ρ	:	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	Dichte
k	:	$\left[\frac{m \cdot J}{s \cdot K}\right]$	Wärmeleitkoeffizient
f	:	$\left[\frac{J}{s \cdot m^3}\right]$	Wärmequellendichte.

Ω ist ein isotroper Körper, sonst ist $k = k(x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine mögliche Verallgemeinerung.

Folgende Zusatzbedingungen sind mathematisch notwendig und physikalisch sinnvoll:

a) *Anfangsbedingung* (AB): $u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega$

b) *Randbedingungen* (RB):

1)

$$u(x, t) = \mu_1(x, t), x \in \Gamma = \partial\Omega, t > 0 \quad (2.2)$$

(*Dirichlet-Randbedingung*, RB 1. Art)

2)

$$k \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = \mu_2(x, t), x \in \Gamma, t > 0 \quad (2.3)$$

(Neumann-Randbedingung, RB 2. Art)

n ... äußerer Einheitsnormalenvektor

3) $k \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = \sigma(u(x, t) - \mu_3(x, t)), x \in \Gamma, t > 0$
 (Robin-Randbedingung, RB 3. Art)

Beispiel 2.2 Diffusion

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, t > 0$$

$u(x, t) : \left[\frac{1}{m^3} \right]$ Konzentration

$c : [1]$ Porositätskoeffizient $\left(c \sim \frac{V_p}{V} \right)$

$D : \left[\frac{m^2}{s} \right]$ Diffusionskoeffizient

+ Anfangs- und Randbedingungen.

Definition 2.1 (klassische Lösung)

Eine Funktion $u(x, t)$ heißt *klassische Lösung* von (2.1) und (2.2) (bzw. (2.3)), falls

1) $u \in C^{2,1}(\underbrace{\Omega \times (0, T)}_{\text{Raum-Zeit-Zylinder}}) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega} \times [0, T])$.

Raum-Zeit-Zylinder

Der erste Exponent gibt die x -Differenzierbarkeit an, der zweite die t -Differenzierbarkeit.

2) (2.1), (2.2) (bzw. (2.3)) sind punktweise erfüllt.

Die folgenden Probleme verhindern die Existenz klassischer Lösungen:

- a) ein nichtglatter Rand Γ
- b) nichtglatte Daten (AB oder RB)
- c) Kompatibilitätsbedingungen (zwischen AB und RB) nicht erfüllt

In §5 werden wir daher *schwache Lösungen* von PDGlen betrachten; diese bilden dann die Grundlage der FEM (§6).

Beispiel 2.3

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, t > 0$$

$$\text{AB: } u(x, 0) = 0$$

$$\text{RB: } u(0, t) = h(t)$$

Die analytische Lösung (mit der Annahme $u(\infty, t) = 0$) lautet

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2t}}}^{\infty} h\left(t - \frac{x^2}{2\tau^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau. \quad (2.4)$$

Berechnung z.B. mit *Laplace-Transformation* (in der Zeit-Variablen):

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, s) &:= \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C} \\ \Rightarrow \hat{u}_t(x, s) &= s\hat{u} - u(x, 0) = \hat{u}_{xx}, \quad x > 0, s \text{ fest} \\ \hat{u}(0, s) &= \hat{h}(s) \end{aligned}$$

Die Ableitung u_t in (2.4) ist nur beschränkt (für $t \rightarrow 0$), falls $h(0) = 0$ gilt. Dies ist die sog. *Kompatibilitätsbedingung*.

Bem: *Glättungseigenschaft* von parabolischen Anfangs-Randwertproblemen: Falls f glatt ist, wird die Lösung u mit wachsendem t glatter (Bsp \rightarrow Übung).

2.2 Differenzverfahren für eindimensionale parabolische Aufgaben

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad , \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \\ u(0, t) &= \mu_0(t) \quad , \\ u(1, t) &= \mu_1(t) \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Diskretisierung ist wie folgt: ($h = \Delta x, k = \Delta t$)

$$\begin{aligned} x_j &= jh \quad , \quad j = 0, 1, \dots, J \quad h = \frac{1}{J} \\ t_n &= nk \quad , \quad n = 0, 1, \dots, N \quad k > 0 \end{aligned} \quad \text{“Schrittweiten”}$$

Wir ersetzen $\Omega = (0, 1)$ und $\bar{\Omega} = [0, 1]$ durch die *Gitter*

$$\begin{aligned}\Omega_h &= \{x_j \text{ , } j = 1, \dots, J-1\} \text{ , } \Gamma_h = \{x_0, x_J\} \text{ Rand} \\ \bar{\Omega}_h &= \{x_j \text{ , } j = 0, 1, \dots, J\} \text{ , } \text{ (auf } \bar{\Omega}_h \text{ def.) Gitterfunktion}\end{aligned}$$

Bezeichnung:

$$u_j^n \approx u(x_j, t_n); \quad j = 0, \dots, J; \quad n = 0, \dots, N$$

Definition 2.2 (*Gitterfunktion*)

Eine Familie der Vektoren

$$u_h^n = (u_0^n, \dots, u_J^n)^T \in \mathbb{R}^{J+1}, \quad n = 0, \dots, N$$

heißt (auf $\bar{\Omega}_h$ definierte) Gitterfunktion

Sei $v(x)$ eine genügend glatte Funktion, $v_j \approx v(x_j)$.

Definition 2.3 (*Differenzenquotienten*)

Die folgenden Differenzenquotienten nennt man

$$\begin{aligned}D_x^+ v_j &= \frac{v_{j+1} - v_j}{h} && \text{Vorwärtsdifferenz} \\ D_x^- v_j &= \frac{v_j - v_{j-1}}{h} && \text{Rückwärtsdifferenz} \\ D_x^0 v_j &= \frac{v_{j+1} - v_{j-1}}{2h} && \text{zentrale Differenz} \\ D_x^2 v_j &= \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} && \text{zweite Differenz}\end{aligned}$$

Es gilt offenbar:

$$D_x^0 v_j = \frac{1}{2}(D_x^+ v_j + D_x^- v_j), \quad D_x^2 v_j = D_x^+ D_x^- v_j = D_x^- D_x^+ v_j$$

Aus der Taylorformel für $v(x)$ an der Stelle x_j ergibt sich:

$$\begin{aligned}D_x^+ v_j &= v'(x_j) + \frac{h}{2}v''(x_j) + O(h^2) \\ D_x^- v_j &= v'(x_j) - \frac{h}{2}v''(x_j) + O(h^2) \\ D_x^0 v_j &= v'(x_j) + O(h^2), \quad D_x^2 v_j = v''(x_j) + O(h^2)\end{aligned}$$

Definition 2.4 (*Konsistenz(-ordnung)*)

Sei L ein Differentialoperator.

Der Differenzenoperator $L_h : \mathbb{R}^{J+1} \rightarrow \mathbb{R}^{J+1}$ heißt mit L konsistent (approximiert L) mit der Ordnung p , wenn

$$\|L_h u_h - Lu\|_{\infty, \bar{\Omega}_h} := \max_{0 \leq j \leq J} |(L_h u_h)_j - (Lu)(x_j)| = O(h^p)$$

gilt.

$\|\cdot\|_{\infty, \bar{\Omega}_h}$ heißt die diskrete Maximumsnorm (auf $\bar{\Omega}_h$)

D.h. D_x^+, D_x^-, D_x^0 sind konsistent mit $L = \frac{\partial}{\partial x}$ mit der Ordnung 1,1,2.
 D_x^2 ist konsistent mit $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ mit der Ordnung 2.

Beispiel 2.1

Betrachtet wird der folgende Differentialoperator

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Wir definieren

$$(L_h u_h)_j := D_x^+ a_j D_x^- u_j = \frac{1}{h} \left(a_{j+1} \underbrace{\frac{u_{j+1} - u_j}{h}}_{\approx u'(x_j)} - a_j \underbrace{\frac{u_j - u_{j-1}}{h}}_{\approx u'(x_j)} \right),$$

wobei a eine Gitterfunktion ist.

Ziel: Bestimmung von a für 2. Approximationsordnung.

Es gilt

$$\begin{aligned} (L_h u_h)_j &= \frac{a_{j+1} - a_j}{h} u'(x_j) + \frac{a_{j+1} + a_j}{2} u''(x_j) + \frac{h(a_{j+1} - a_j)}{6} u'''(x_j) + O(h^2) \\ (Lu)(x_j) &= \chi'(x_j) u'(x_j) + \chi(x_j) u''(x_j) \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} (L_h u_h)_j - (Lu)(x_j) &= \left(\frac{a_{j+1} - a_j}{h} - \chi'(x_j) \right) u'(x_j) + \left(\frac{a_{j+1} + a_j}{2} - \chi(x_j) \right) u''(x_j) \\ &\quad + \frac{h(a_{j+1} - a_j)}{6} u'''(x_j) + O(h^2) \end{aligned}$$

L_h approximiert L mit der Ordnung 2, wenn

$$\frac{a_{j+1} - a_j}{h} = \chi'(x_j) + O(h^2), \quad \frac{a_{j+1} + a_j}{2} = \chi(x_j) + O(h^2)$$

Mögliche Varianten sind

- 1) $a_j := \frac{1}{2} [\chi(x_j) + \chi(x_{j-1})]$
- 2) $a_j := \chi(x_j - \frac{1}{2}h)$
- 3) $a_j := \sqrt{\chi(x_j) \cdot \chi(x_{j-1})}$

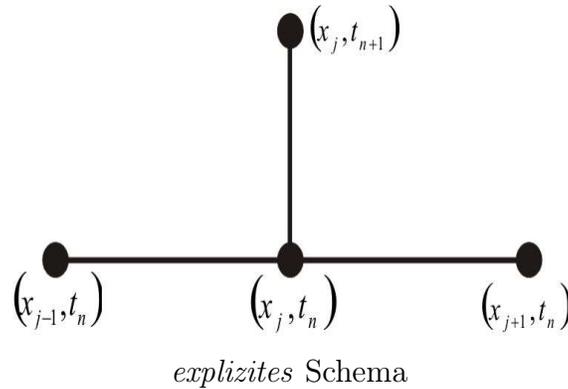
Bemerkung:

Die „natürliche“ Wahl $a_j := \chi(x_j)$ garantiert nur die erste Approximationsordnung.

Für parabolische Gleichungen bezeichnen wir

$$D_t^+ u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} \quad \text{usw.}$$

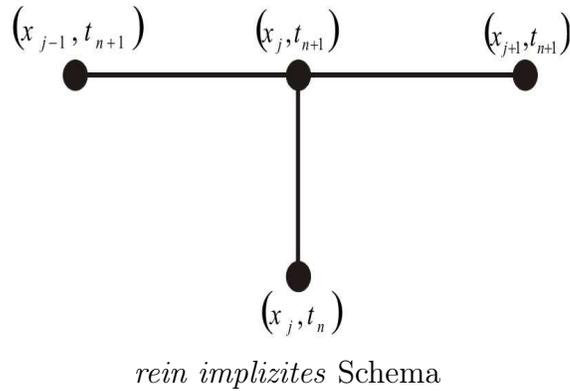
Um die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$ in (x_j, t_n) zu approximieren, benutzen wir die folgende Differenzenschemata (*Diskretisierungsschemata*):



$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \varphi_j^n,$$

d.h. $D_t^+ u_j^n = D_x^2 u_j^n + \varphi_j^n \rightarrow$ explizite Rekursion für u_j^{n+1}

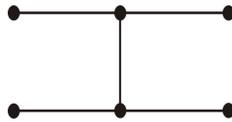
oder



$$D_t^+ u_j^n = D_x^2 u_j^{n+1} + \varphi_j^n \Rightarrow u_j^{n+1} \text{ aus lin. Gleichungssystem.}$$

Das gewichtete Schema (“ Θ -Schema”) ist

$$D_t^+ u_j^n = \Theta D_x^2 u_j^{n+1} + (1 - \Theta) D_x^2 u_j^n + \varphi_j^n, \quad 0 \leq \Theta \leq 1$$



Θ : “implicitness parameter”

Lemma 2.1 Das Θ -Schema approximiert die Wärmeleitungsgleichung mit

a) $O(h^2 + k^2)$, falls $\Theta = \frac{1}{2}$, $\varphi_j^n = f(x_j, t_n + \frac{1}{2}k)$ für $u \in C^{4,3}$
 (Crank-Nicolson Schema)

b) $O(h^4 + k^2)$, falls $\Theta = \Theta^* := \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12k}$,
 $\varphi_j^n = \frac{5}{6}f(x_j, t_n + \frac{1}{2}k) + \frac{1}{12} \left[f(x_{j-1}, t_n + \frac{1}{2}k) + f(x_{j+1}, t_n + \frac{1}{2}k) \right]$
 für $u \in C^{6,3}$ (Schema mit erhöhter Approximationsordnung)

c) $O(h^2 + k)$, falls $\Theta \neq \frac{1}{2}$, $\Theta \neq \Theta^*$, $\varphi_j^n = f(x_j, t_n) \Rightarrow O(h^2 + k)$, für $u \in C^{4,2}$

Beweis: Taylorformel!

2.3 Stabilität und Konvergenz in l^2

Sei $Lu = f$ eine (stationäre, elliptische) partielle Differentialgleichung, die durch das Differenzenschema $L_h u_h = f_h$ auf dem Gitter Ω_h approximiert wird.

Definition 2.4 (l^∞ -Stabilität)

Folgt aus $L_h u_h = f_h$ die Ungleichung

$$\|u_h\|_{\infty, \Omega_h} = \max |u_h| \leq C \|f_h\|_{\infty, \Omega_h}$$

mit einer von h unabhängigen Konstanten C , so heißt das Verfahren stabil.

Die Konsistenz sichert, daß der gegebene Differentialoperator approximiert wird. Die Stabilität ermöglicht, von den *Residuen*

$$(L_h u_h)_j - (Lu)(x_j)$$

auf das Verhalten des *Fehlers* $u - u_h$ zu schließen.

Bei der Stabilitätsuntersuchung nach von Neumann geht man wie folgt vor:

Wir betrachten eine *homogene Gleichung*

$$\begin{aligned} D_t^+ u_j^n &= \Theta D_x^2 u_j^{n+1} + (1 - \Theta) D_x^2 u_j^n, \quad j = 1, \dots, J - 1 \\ \text{RB: } u_0^n &= u_J^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \\ \text{AB: } u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 1, \dots, J - 1 \end{aligned}$$

Der diskrete Separationsansatz der Form $u_j^n = v_j w^n$ liefert

$$\begin{aligned} v_j \frac{w^{n+1} - w^n}{k} &= \Theta w^{n+1} D_x^2 v_j + (1 - \Theta) w^n D_x^2 v_j \\ &= [\Theta w^{n+1} + (1 - \Theta) w^n] D_x^2 v_j \end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{k[\Theta w^{n+1} + (1 - \Theta) w^n]} = \frac{D_x^2 v_j}{v_j} = -\lambda = \text{konst.}$$

Der Vektor v löst damit die folgende diskrete Eigenwertaufgabe:

$$D_x^2 v_j + \lambda v_j = 0, \quad j = 1, \dots, J - 1; \quad v_0 = v_J = 0$$

oder

$$v_{j+1} + (\lambda h^2 - 2)v_j + v_{j-1} = 0; \quad j = 1, \dots, J - 1$$

Die (nichttrivialen) Lösungen dieser Aufgabe sind von der Form

$$v_j^{(l)} = \sqrt{2} \sin \pi l x_j; \quad j = 0, 1, \dots, J; \quad l = 1, \dots, J-1 \quad (\text{Eigenfkt. ... harmonische Moden}) \quad (2.6)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \sin \pi l(x_j + h) + (\lambda h^2 - 2) \sin \pi l x_j + \sin \pi l(x_j - h) \\ &= \sin \pi l x_j [2 \cos \pi l h + \lambda_l h^2 - 2] \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\lambda_l = \frac{2}{h^2}(1 - \cos \pi l h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi l h}{2} < \frac{4}{h^2}, \quad l = 1, \dots, J-1 \quad (\text{Eigenwerte})$$

Damit ergibt sich für w^n :

$$w^{n+1} - w^n + \lambda_l k [\Theta w^{n+1} + (1 - \Theta) w^n] = 0$$

oder

$$w^{n+1} = q_l \cdot w^n \quad \text{mit } q_l := \frac{1 - \lambda_l k(1 - \Theta)}{1 + \lambda_l k \Theta} \quad \dots \text{ Verstärkungsfaktor}$$

Definition 2.5 Das Verfahren heißt (l^2)-stabil, falls $|q_l| \leq 1$ gilt, d.h.

$$-1 \leq \frac{1 - \lambda_l k(1 - \Theta)}{1 + \lambda_l k \Theta} \leq 1.$$

Die rechte Ungleichung ist immer erfüllt ($\lambda_l > 0$). Für die linke gilt:

$$-1 - \lambda_l k \Theta \leq 1 - \lambda_l k(1 - \Theta)$$

oder

$$\lambda_l k(1 - 2\Theta) \leq 2; \quad \Theta \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda_l k}; \quad l = 1, \dots, J-1$$

Wegen $\lambda_l \leq \frac{4}{h^2}$ ergibt sich:

Das Verfahren ist stabil für alle $k > 0$ (*unbedingt stabil*), wenn

$$\Theta \geq \Theta_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\gamma} \quad \text{mit } \gamma := \frac{k}{h^2} \quad \dots \text{parabol. Schrittweitenverhältnis}$$

erfüllt ist (z.B. rein implizit / Crank-Nicolson).

Für $0 \leq \Theta < \Theta_0$ gibt es nur *bedingte Stabilität* für

$$k \leq \frac{h^2}{2(1-2\Theta)}, \text{ d.h. } \boxed{\gamma \leq \frac{1}{2(1-2\Theta)}}$$

Formale Fourier-Stabilitätstechnik (nach von Neumann)

Beispiel: (explizites Verfahren)

$$D_t^+ u_j^n = D_x^2 u_j^n; \quad j = 1, \dots, J-1$$

d.h.

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_j^n &= \frac{k}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ u_j^{n+1} &= (1 - 2\gamma)u_j^n + \gamma(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n), \quad \gamma := \frac{k}{h^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Man betrachtet eine (harmonische) *Anfangsstörung*:

$$u^0(x_j) = e^{i\lambda x_j} \text{ bzw. } u_j^0 = e^{i\lambda jh}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Diese Störung entwickelt sich zeitlich wie

$$u_j^n = q^n e^{i\lambda jh}, \quad (2.8)$$

wobei die Randbedingungen hier ausser Acht gelassen wurden.

Für Stabilität muß $|q| \leq 1$ gelten.

Einsetzen von (2.8) in die Verfahrensvorschrift (2.7) liefert nach Division durch $q^n e^{i\lambda jh}$ ($= u_j^n$)

$$\begin{aligned} q &= 1 - 2\gamma + \gamma(e^{i\lambda h} + e^{-i\lambda h}) \\ &= 1 - 2\gamma + 2\gamma \cos \lambda h \\ &= 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{\lambda h}{2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

d.h.

$$\begin{aligned} |q| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq -4\gamma \sin^2 \frac{\lambda h}{2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \gamma \sin^2 \frac{\lambda h}{2} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ist erfüllt $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, wenn $\gamma = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ ist.

Bemerkung: formale Ersetzungen im Differenzschema:

$$D_x^2 \longleftrightarrow -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\lambda h}{2}, \quad D_t^+ \longleftrightarrow \frac{q-1}{k} \quad (\text{vgl. (2.9)})$$

Lemma 2.2 (Stabilität bzgl. der Anfangsbedingung)

Das rein implizite ($\Theta = 1$), das Crank-Nicolson ($\Theta = \frac{1}{2}$) sowie das Schema mit erhöhter Approximationsordnung ($\Theta = \Theta^* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12k}$) sind unbedingt stabil bzgl. der diskreten l^2 -Norm. Das explizite Schema ist stabil für $k \leq \frac{h^2}{2}$.

Beweis:

Die Vektoren $v^{(l)} = \sqrt{2} \sin \pi l x_j$, $l = 1, \dots, J-1$ aus (2.6) bilden eine ONB im \mathbb{R}^{J-1} . Damit kann der Vektor $u^n = (u_1^n, \dots, u_{J-1}^n)^T \in \mathbb{R}^{J-1}$ wie folgt zerlegt werden:

$$u^n = \sum_{l=1}^{J-1} \underbrace{w^{n,l}}_{\in \mathbb{R}} v^{(l)}$$

Für die diskrete l^2 -Norm dieses Vektors gilt

$$\begin{aligned} \|u^n\|_2^2 &:= h \sum_{j=1}^{J-1} |u_j^n|^2 = h \sum_{l=1}^{J-1} |w^{n,l}|^2 \\ &= h \sum_{l=1}^{J-1} |q_l w^{n-1,l}|^2 \leq h \sum_{l=1}^{J-1} |w^{n-1,l}|^2 \leq \dots \\ &\leq h \sum_{l=1}^{J-1} |w^{0,l}|^2 = \|u^0\|_2^2 \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Diese Art von Stabilitätsuntersuchungen sind nur

- in l^2 -Norm
- für lineare Modellbeispiele mit konstanten Koeffizienten möglich.

Lemma 2.3 Für $\Theta \geq \max(0, \Theta_0)$ mit $\Theta_0 := \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4k}$ ist das Schema

$$\begin{aligned} D_t^+ u_j^n &= \Theta D_x^2 u_j^{n+1} + (1-\Theta) D_x^2 u_j^n + \varphi_j^n, \quad j = 1, \dots, J-1 \\ \text{RB: } u_0^n &= u_J^n = 0 \quad n = 0, 1, \dots \\ \text{AB: } u_j^0 &= u_0(x_j) \quad j = 1, \dots, J-1 \end{aligned} \tag{2.10}$$

stabil bzgl. der rechten Seite und der Anfangsbedingung und es gilt:

$$\|u^{n+1}\|_2 \leq \|u^0\|_2 + k \sum_{m=0}^n \|\varphi^m\|_2$$

Beweis:

Basisdarstellung der Lösung $u^n = (u_1^n, \dots, u_{J-1}^n) \in \mathbb{R}^{J-1}$ und der Inhomogenität:

$$u^n = \sum_{l=1}^{J-1} w^{n,l} v^{(l)}, \quad \varphi^n = \sum_{l=1}^{J-1} \psi^{n,l} v^{(l)}$$

Das Einsetzen in die Gleichung (2.10) ergibt mit $D_x^2 v_j^{(l)} = -\lambda_l v_j^{(l)}$ (vgl. (2.6))

$$\sum_{l=1}^{J-1} (D_t^+ w^{n,l} + \lambda_l \Theta w^{n+1,l} + \lambda_l (1 - \Theta) w^{n,l} - \psi^{n,l}) v^{(l)} = 0$$

oder

$$(1 + k\lambda_l \Theta) D_t^+ w^{n,l} + \lambda_l w^{n,l} - \psi^{n,l} = 0; \quad l = 1, \dots, J-1$$

oder

$$w^{n+1,l} = q_l w^{n,l} + \beta_l \psi^{n,l}, \quad q_l = \frac{1 - k\lambda_l(1 - \Theta)}{1 + k\lambda_l \Theta}, \quad \beta_l = \frac{k}{1 + k\lambda_l \Theta}$$

Damit ergibt sich die *Abschätzung*

$$u^{n+1} = \sum_{l=1}^{J-1} w^{n+1,l} v^{(l)} = \sum_{l=1}^{J-1} q_l w^{n,l} v^{(l)} + \sum_{l=1}^{J-1} \beta_l \psi^{n,l} v^{(l)},$$

$$\|u^{n+1}\|_2 \leq \left\| \sum_{l=1}^{J-1} \dots \right\|_2 + \left\| \sum_{l=1}^{J-1} \dots \right\|_2 \leq \max_{1 \leq l \leq J-1} |q_l| \|u^n\|_2 + \max_{1 \leq l \leq J-1} |\beta_l| \|\varphi^n\|_2$$

Für $\Theta \geq \Theta_0$ gilt $|q_l| \leq 1$; ferner $|\beta_l| \leq k \forall l$.

$$\Rightarrow \|u^{n+1}\|_2 \leq \|u^n\|_2 + k \|\varphi^n\|_2$$

□

Die Konvergenz in der l^2 -Norm folgt sofort aus der Konsistenz (Approximation) und der Stabilität:

Satz 2.1 Wenn das Θ -Schema die Aufgabe (2.5) (mit $\mu_0 = \mu_1 \equiv 0$) approximiert und stabil ist, dann konvergiert es mit derselben Ordnung, d.h.

$$\|u^n - u(\cdot, t_n)\|_2 = \begin{cases} O(h^2 + k), & \Theta \neq \frac{1}{2}, \quad \Theta \neq \Theta^* \\ O(h^2 + k^2), & \Theta = \frac{1}{2} \\ O(h^4 + k^2), & \Theta = \Theta^*, \\ \text{für } t_n \leq T = M \cdot k \end{cases}$$

Beweis:

Für den Fehler $e_j^n := u_j^n - u(x_j, t_n)$ gilt:

$$\text{Fehlergl. } \begin{cases} D_t^+ e_j^n = \Theta D_x^2 e_j^{n+1} + (1 - \Theta) D_x^2 e_j^n + \psi_j^n; & j = 1, \dots, J - 1; \quad n = 0, 1, \dots \\ e_0^n = e_j^n = 0 & n = 0, 1, \dots \\ e_j^0 = 0 & j = 1, \dots, J - 1 \end{cases}$$

wobei ψ_j^k den Approximationsfehler (Abschnitt 2.2, Lemma 2.1) bezeichnet.

Aus Lemma 2.3 erhält man

$$\begin{aligned} \|e^n\|_2 &\leq k \sum_{m=0}^{n-1} \|\psi^m\|_2 \leq nk \max_{0 \leq m \leq n-1} \|\psi^m\|_2 \\ &= t_n \max_{0 \leq m \leq n-1} \|\psi^m\|_2 \\ &\leq T \cdot \max_{0 \leq m \leq M} \|\psi^m\|_2 \end{aligned}$$

□

Bem: Der Äquivalenzsatz von Lax liefert auch die Umkehrung:

Sei das Anfangswertproblem für eine PDGL. sachgemäß gestellt. Für ein konsistentes Differenzenverfahren sind dann Stabilität und Konvergenz äquivalent. [Str]

2.4 Tridiagonale Gleichungssysteme

Das Θ -Schema ($\Theta > 0$) für die Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Dirichlet-RBen führt auf folgende Gleichungssysteme:

$$\underbrace{(I + \Theta\gamma T)}_{:=A} u^{n+1} = \underbrace{(I - (1 - \Theta)\gamma T)}_{\text{Inhomogenität } f^n} u^n \quad (2.11)$$

mit $T := \text{tridiag}(-1, 2, -1)$, $A = \text{tridiag}(-\Theta\gamma, 1 + 2\Theta\gamma, -\Theta\gamma)$.

Definition 2.6 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{J \times J}$ heißt

a) M-Matrix, wenn

- a) $a_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j$;
- b) $A^{-1} \geq 0$ (komponentenweise!)

b) irreduzibel diagonaldominant, wenn

- a) alle Nebendiagonalelemente $\neq 0$;
- b) $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \dots, J$

und mindestens eine Ungleichung strikt gilt.

- A aus (2.11) ist irreduzibel diagonaldominant;
 $\Rightarrow A$ ist regulär (lt. Lemma 6.2, „Höhere Numerik“);
 ferner: A ist positiv definit (mit Satz von Gerschgorin)
 \Rightarrow LR-Verfahren ohne Pivotsuche anwendbar.
- Laut Satz 6.2, „Höhere Numerik“ (jede irr. diag. dom. Matrix mit positiver Diagonale und negativer Nebendiagonale ist M-Matrix): A aus (2.11) ist M-Matrix.

Lösungsalgorithmus („Thomas Algorithmus“) mit Aufwand $O(J)$ für das Gleichungssystem $Ay = f$ mit

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -b_{J-1} \\ 0 & \dots & 0 & -a_J & c_J \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(J+1) \times (J+1)}. \quad (2.12)$$

Lösungs“ansatz“:

$$y_j = \alpha_{j+1}y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = J-1, \dots, 0$$

$$\Rightarrow y_J = \frac{f_J + \beta_J a_J}{c_J - \alpha_J a_J}$$

und

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \quad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}$$

$$\alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - \alpha_j a_j} \quad \beta_{j+1} = \frac{f_j + \beta_j a_j}{c_j - \alpha_j a_j}; \quad j = 1, 2, \dots, J-1$$

Lemma 2.4 Sei A irreduzibel diagonaldominant.

Dann ist obiger Algorithmus durchführbar ($c_j - \alpha_j a_j \neq 0$) und stabil ($|\alpha_j| \leq 1$; $j = J, \dots, 1$).

Beweis: [Str] § 3.4

2.5 Stabilität und Konvergenz in der diskreten Maximumnorm

(schwaches) Maximumprinzip

Satz 2.2 Sei $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ klassische Lösung von $u_t - \Delta u = g$ mit $g(x, t) \leq 0$.
 \Rightarrow Fkt. u nimmt ihr Maximum auf Γ oder für $t = 0$ an.

Bew: [HB] § 100

Folgerung: Die klassische Lösung des *homogenen* Dirichletproblems erfüllt

$$\underbrace{\min_{x \in \bar{\Omega}} u_0(x)}_{\leq 0} \leq u(x, t) \leq \underbrace{\max_{x \in \bar{\Omega}} u_0(x)}_{\geq 0}$$

diskretes Analogon für Θ - Schema ($0 \leq \Theta \leq 1$); das ist eine *qualitative Eigenschaft* des Schemas – zusätzlich zur Konvergenz:

$$\begin{aligned} D_t^+ u_j^n &= \Theta D_x^2 u_j^{n+1} + (1 - \Theta) D_x^2 u_j^n + \varphi_j^n; \quad j = 1, \dots, J - 1 \\ \text{RB:} \quad u_0^n &= u_j^n; \quad n = 0, 1, \dots \\ \text{AB:} \quad u_j^0 &= u_0(x_j); \quad j = 1, \dots, J - 1 \end{aligned}$$

Matrixform:

$$\underbrace{(I + \Theta \gamma T)}_{=A} u^{n+1} = (I - (1 - \Theta) \gamma T) u^n + k \varphi^n$$

mit $u^n = (u_1^n, \dots, u_{J-1}^n)$; $T = \text{tridiag}(-1, 2, -1)$

Satz 2.3 Sei $\gamma = \frac{1}{2(1-\Theta)}$. Dann gilt:

a) für $\varphi_j^n \leq 0$:

$$\max_j u_j^n \leq \max_j u_j^0; \quad n = 1, 2, \dots$$

b) für $\varphi_j^n = 0$:

$$\min_j u_j^0 \leq u_j^n \leq \max_j u_j^0 \quad \forall n, j$$

c)

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty + k \sum_{m=0}^n \|\varphi^m\|_\infty$$

Beweis:

a) $2(1 - \Theta)\gamma \leq 1 \Rightarrow I - (1 - \Theta)\gamma T \geq 0$ (komponentenweise)

$A^{-1} \geq 0$ (komponentenweise), da A M-Matrix ist

$\Rightarrow S := A^{-1}[I - (1 - \Theta)\gamma T] \geq 0$ (komponentenweise)

$$\Rightarrow u^{n+1} = Su^n + kA^{-1} \underbrace{\varphi^n}_{\leq 0} \leq Su^n \text{ (komponentenweise)} \quad (2.13)$$

• definiere $v^n := \max_j u_j^n$

$\Rightarrow u^n \leq v^n \mathbb{1}$ (komponentenweise) mit $\mathbb{1} := (1, \dots, 1)^T$

$$\Rightarrow u^{n+1} \leq Su^n \stackrel{(S \geq 0)}{\leq} S \underbrace{v^n}_{\in \mathbb{R}} \mathbb{1} = v^n S \mathbb{1} \quad (2.14)$$

•

$$(I - (1 - \Theta)\gamma T) \mathbb{1} = \mathbb{1} - \underbrace{(1 - \Theta)\gamma}_{\geq 0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leq \mathbb{1} + \Theta\gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A \mathbb{1}$$

da

$$A^{-1} \geq 0 : S \mathbb{1} \leq \mathbb{1}. \quad (2.15)$$

Aus (2.14): $u^{n+1} \leq v^n \mathbb{1}$.

Also:

$$\max_j u_j^{n+1} \leq \max_j u_j^n.$$

b) direkt aus (a) für Minimum.

c) analog zu (a):

$$\mathbb{I} \leq \mathbb{I} + \Theta \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A\mathbb{I}$$

$$\Rightarrow A^{-1}\mathbb{I} \leq \mathbb{I} \tag{2.16}$$

aus (2.13) mit $\psi^n := \max_j \varphi_j^n$:

$$u^{n+1} \leq Sv^n \mathbb{I} + kA^{-1}\psi^n \mathbb{I} \stackrel{(2.15),(2.16)}{\leq} (v^n + k\psi^n) \mathbb{I}$$

+ analog für Minimum

$$\Rightarrow \|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty + k\|\varphi^n\|_\infty$$

□

Satz 2.4 (Konvergenz des Θ -Schemas in der Maximumnorm)

Das Differenzenschema ist stabil und konvergiert in der Maximumnorm, falls

$$\begin{aligned} \Theta = 1 & \quad (\text{unbedingt}) \\ \Theta = \frac{1}{2} & \Rightarrow k \leq h^2 \text{ (schlechter als in } l^2!) \\ \Theta = 0 & \Rightarrow k \leq \frac{h^2}{2} \\ \Theta = \Theta^* & \Rightarrow k \leq \frac{5}{6}h^2 \text{ (schlechter als in } l^2!) \end{aligned}$$

Bemerkung:

- 1) Die Situation mit $\Theta = \frac{1}{2}$, $\Theta = \Theta^*$ ist auf eine „schlechte“ Beweisführung zurückzuführen.
- 2) Vorteil gegenüber l^2 -Stabilität:
auf nicht-konstante Koeffizienten erweiterbar.

2.6 mehrdimensionale Probleme

Bsp: Crank- Nicolson Verfahren für

$$\begin{aligned}
 u_t &= cu_{xx} + du_{yy}, \quad \Omega = (0, 1)^2, \quad t > 0 \\
 u_{jl}^n &\approx u(x_j, y_l, t_n); \quad j = 0, \dots, J; \quad l = 0, \dots, L; \quad h_1 = \frac{1}{J}; \quad h_2 = \frac{1}{L} \\
 D_t^+ u_{jl}^n &= \left(\frac{c}{2} D_x^2 + \frac{d}{2} D_y^2 \right) u_{jl}^{n+1} + \left(\frac{c}{2} D_x^2 + \frac{d}{2} D_y^2 \right) u_{jl}^n
 \end{aligned}$$

⇒ im Gleichungssystem $Au^{n+1} = f^n$ ist A dünn besetzt und hat (bei geeigneter Gitternumerierung – z.B. zeilenweise) *Block-Tridiagonal-Gestalt*:

$$A = \begin{pmatrix} B & -\frac{\gamma}{2}I & & 0 \\ -\frac{\gamma}{2}I & B & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{\gamma}{2}I \\ 0 & & -\frac{\gamma}{2}I & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(J+1)^2 \times (J+1)^2}$$

mit

$$B = I + \frac{\gamma}{2} \cdot \text{tridiag}(-1, 4, -1) \in \mathbb{R}^{(J+1) \times (J+1)}, \quad I \in \mathbb{R}^{(J+1) \times (J+1)}$$

(hier für $J_x = J_y = J$; $c = d = 1$; $\gamma = \frac{k}{h^2}$)

• Lösung des (großen) Gleichungssystem entweder mit Cholesky-Zerlegung (Aufwand hier nur $O(J^4)$, da Bandbreite von A nur $O(J)$) oder iterativ (z.B. präkonditioniertes CG-Verfahren, siehe auch § 7.1);

auf Rechtecken auch mit der *ADI-Methode* (Alternating Direction Implicit)

Idee: Zerlegung („Splitten“) des 2-dimensionalen Problems $u_t = A_1 u + A_2 u$ mit $A_1 = c\partial_x^2$, $A_2 = d\partial_y^2$ in $J_x + J_y + 2$ (einfachere) 1-dimensionale Probleme:

$$w_t = A_1 w \quad \text{und} \quad w_t = A_2 w$$

ADI-Herleitung:

analog zu Crank-Nicolson gilt:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{k} = \frac{1}{2}(A_1 u^{n+1} + A_2 u^{n+1}) + \frac{1}{2}(A_1 u^n + A_2 u^n) + O(k^2)$$

bzw.

$$\left(I - \frac{k}{2}A_1 - \frac{k}{2}A_2 \right) u^{n+1} = \left(I + \frac{k}{2}A_1 + \frac{k}{2}A_2 \right) u^n + O(k^3)$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \left(I - \frac{k}{2}A_1 - \frac{k}{2}A_2 + \frac{k^2}{4}A_1A_2\right)u^{n+1} \\ = & \left(I + \frac{k}{2}A_1 + \frac{k}{2}A_2 + \frac{k^2}{4}A_1A_2\right)u^n + \frac{k^2}{4}A_1A_2 \underbrace{(u^{n+1} - u^n)}_{=O(k)} - O(k^3) \end{aligned}$$

$$\left(I - \frac{k}{2}A_1\right)\left(I - \frac{k}{2}A_2\right)u^{n+1} = \left(I + \frac{k}{2}A_1\right)\left(I + \frac{k}{2}A_2\right)u^n + O(k^3)$$

- seien A_{1h} und A_{2h} $O(h^2)$ -Approximationen von $A_1, A_2 \Rightarrow$

$$\left(I - \frac{k}{2}A_{1h}\right)\left(I - \frac{k}{2}A_{2h}\right)u^{n+1} = \left(I + \frac{k}{2}A_{1h}\right)\left(I + \frac{k}{2}A_{2h}\right)u^n + O(k^3) + O(kh^2)$$

- Der folgende Algorithmus (von Peaceman & Rachford) ist 2. Ordnung in Zeit und Ort und unbedingt stabil. ([Str] § 7.3 → Übung)

$$\left(I - \frac{k}{2}A_{1h}\right)\left(I - \frac{k}{2}A_{2h}\right)v^{n+1} = \left(I + \frac{k}{2}A_{1h}\right)\left(I + \frac{k}{2}A_{2h}\right)v^n$$

oder in äquivalenter Form (auch wenn A_{1h} und A_{2h} *nicht* kommutieren):

$$\left(I - \frac{k}{2}A_{1h}\right)v^{n+\frac{1}{2}} = \left(I + \frac{k}{2}A_{2h}\right)v^n \tag{2.17}$$

$$\left(I - \frac{k}{2}A_{2h}\right)v^{n+1} = \left(I + \frac{k}{2}A_{1h}\right)v^{n+\frac{1}{2}} \tag{2.18}$$

Die Matrizen $I - \frac{k}{2}A_{1h}$ und $I - \frac{k}{2}A_{2h} \in \mathbb{R}^{(J-1) \times (J+1)}$ sind tridiagonal, da (2.17) nur in x -Richtung implizit ist (und (2.18) nur in y -Richtung).

Ref: [GR] § 6.1-2; [Str] § 6.3, 7.3, 10.1; [AH] § 5; [HB] § 100

3 Differenzverfahren für elliptische Probleme

3.1 Mathematische Modelle

Beispiel 3.1 *Wärmeleitung oder Diffusion (stationär)*

$$-\operatorname{div}(\chi(x) \operatorname{grad} u(x)) = F(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad d = 1, 2, 3$$

+ Randbedingungen ($\Gamma = \partial\Omega$):

- 1) $u(x)|_{x \in \Gamma} = \mu_1(x)$
- 2) $\chi(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x)|_{x \in \Gamma} = \mu_2(x)$
- 3) $\chi(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \sigma(u(x) - \mu_3(x))|_{x \in \Gamma} = 0$

Beispiel 3.2 *Schwingungen*

Wellengleichung: $\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} - F(x)e^{i\omega t}$, $u = u(x, t)$

Ansatz: $u(x, t) = v(x)e^{i\omega t}$ (t -harmon. Lösungen)

$\Rightarrow \Delta v + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 v = -F(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ (Helmholtzgleichung)

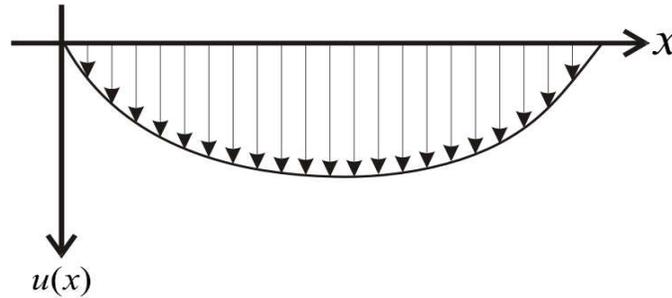
+ Randbedingungen ($\Gamma = \partial\Omega$):

$$v(x)|_{x \in \Gamma} = 0$$

Beispiel 3.3 *Auslenkung einer Membran*

Eine weitere Möglichkeit zur Herleitung von Modellgleichungen, besteht darin sogenannte *variationelle Prinzipien* auszunutzen, die in der Physik eine grosse Rolle spielen.

Betrachte eine Membran, die am Rand eingespannt ist, unter Belastung durch eine vertikale Kraft.



Sei

- Kraftdichte $f(x, y)$ (gegeben)
- Auslenkung $u(x, y)$ (gesucht)
- Einspannbedingung $u(x, y) = 0$ auf $\partial\Omega$

Man definiert das *Energiefunktional*

$$J(u) = J_1(u) + J_2(u)$$

Sei J_1 die Spannungsenergie; diese ist proportional zur Oberflächenänderung.

- Oberfläche vor Auslenkung: $\int_{\Omega} 1 \, dxdy$
- Oberfläche nach Auslenkung: $\int_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \, dxdy$

Insgesamt also

$$J_1(u) = \alpha \int_{\Omega} \left(\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1 \right) \, dxdy;$$

α ist die Elastizität.

Man nimmt kleine Auslenkungen an und verwendet deswegen die Taylorentwicklung:

$$\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1 \approx 1 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_y^2 - 1 = \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_y^2 = \frac{1}{2}|\nabla u|^2$$

$$\Rightarrow J_1(u) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dxdy$$

Sei nun $J_2(u)$ die potentielle Energie:

$$- \int_{\Omega} f u \, dxdy$$

Die Gesamtenergie ist nun

$$J(u) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx dy - \int_{\Omega} f u \, dx dy$$

Eine Funktion $u = u(x, y)$ ist die gesuchte Auslenkung, falls sie das *Prinzip der minimalen Energie* erfüllt:

$$J(u) \leq J(v) \quad \text{für alle möglichen Auslenkungen } v \text{ mit } v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.1)$$

Also gilt auch

$$\forall \varepsilon \neq 0 : J(u) \leq J(u + \varepsilon v)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1. \text{ Variation des Funktionals})$$

Dies ist äquivalent zu

$$\alpha \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega} f v = 0.$$

Mit der Green'schen Formel ergibt sich

$$-\alpha \int_{\Omega} \Delta u v \, dx dy + \underbrace{\alpha \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds}_{=0} - \int_{\Omega} f v \, dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} (-\alpha \Delta u + f) v \, dx dy = 0$$

Da dies für alle Funktionen v gilt, muss die Klammer bereits die Nullfunktion sein. Man erhält also die Gleichung

$$-\alpha \Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

mit der Randbedingung

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Das ist die *Euler-Lagrange-Gleichung* für das Minimierungsproblem (3.1).

Bemerkung

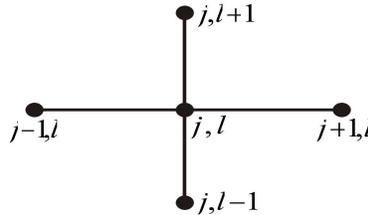
Sei $f \in L^2(\Omega)$ mit $\int_{\Omega} f g \, dx = 0$ für alle $g \in L^2(\Omega)$. Dann folgt $f \equiv 0$ fast überall.

3.2 Differenzenapproximation des Laplace-Operators

Der Laplace-Operator in \mathbb{R}^2 ist

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad u = u(x_1, x_2).$$

- Die einfachste Approximation benutzt den sog. *5-Punkte Stern*



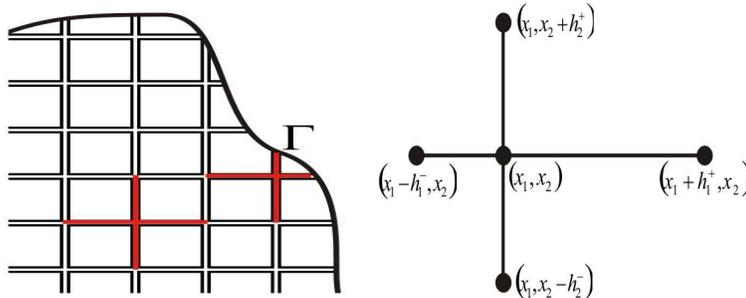
Fünfpunkteformel

$$\Delta u(x_j, y_l) \approx \Delta_h u_{jl} = D_{x_1}^2 u_{j,l} + D_{x_2}^2 u_{j,l} = \frac{1}{h_1^2} (u_{j+1,l} - 2u_{j,l} + u_{j-1,l}) + \frac{1}{h_2^2} (u_{j,l+1} - 2u_{j,l} + u_{j,l-1})$$

- Dieses Schema approximiert den Laplace-Operator mit der Ordnung $O(h_1^2 + h_2^2)$.
- Problem: Approximation an krummlinigen Rändern.
Es ist notwendig, die zweiten Ableitungen auf jeweils 3 Punkten

$$\begin{aligned} & (x_1 - h_1^-, x_2), (x_1, x_2), (x_1 + h_1^+, x_2) \\ \text{bzw.} & (x_1, x_2 - h_2^-), (x_1, x_2), (x_1, x_2 + h_2^+) \end{aligned}$$

zu approximieren



Eine mögliche Approximation ist:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) \approx \frac{1}{\tilde{h}_1} \left(\frac{u(x_1 + h_1^+, x_2) - u(x_1, x_2)}{h_1^+} - \frac{u(x_1, x_2) - u(x_1 - h_1^-, x_2)}{h_1^-} \right) \quad (3.2)$$

mit $\tilde{h}_1 := \frac{1}{2}(h_1^+ + h_1^-)$.

Der Approximationsfehler ist:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) - \frac{1}{\tilde{h}_1}(\dots) = -\frac{1}{3} \underbrace{(h_1^+ - h_1^-)}_{\text{hier } \neq 0} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + O(\tilde{h}_1^2) = O(\tilde{h}_1) \quad (3.3)$$

und ist damit von der Ordnung 1.

Eine andere Möglichkeit ist $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \approx \frac{1}{h_1}(\dots)$ mit $\tilde{h}_1 = \max(h_1^+, h_1^-)$.
Diese Wahl hat gar keine Approx.-Ordnung:

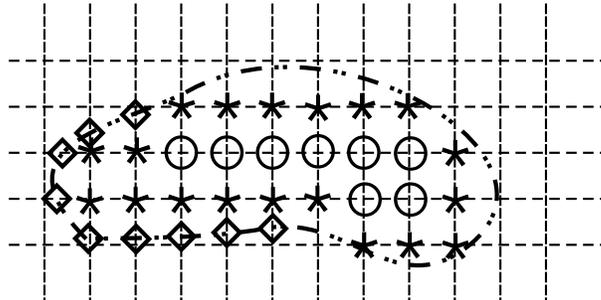
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\tilde{h}_1}(\dots) = O(1)! \quad (3.4)$$

3.3 Die Dirichlet-Aufgabe in 2D

Die Aufgabe

$$\begin{cases} \Delta u(x_1, x_2) = -f, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x_1, x_2) = \mu, & x \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Wir zerlegen den \mathbb{R}^2 in die Rechtecke mit $x_{1,j} = jh_1$, $x_{2,l} = lh_2$ $h_1, h_2 > 0$, $j, l \in \mathbb{Z}$



Bezeichnungen

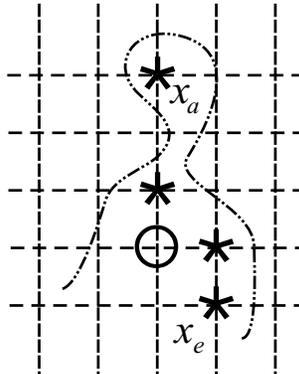
$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Omega}_h = \{O\} & : \text{„echt“ innere Knoten} \\ \Omega_h^* = \{*\} & : \text{„randnahe“ Knoten (Nachbar ist Randknoten)} \\ \Gamma_h = \{\diamond\} & : \text{(einige) Randknoten} \\ \Omega_h = \overset{\circ}{\Omega}_h \cup \Omega_h^* & : \text{innere Knoten,} \quad \Omega_h \cup \Gamma_h : \text{Gitter} \end{aligned}$$

Bemerkung: „randnah“ hängt vom verwendeten Schema ab!

Notation: $\text{Schab}(x) = \{ \text{Gitterpunkte } y \neq x \text{ im Diskretisierungsstern um } x \}$

Definition 3.1

Das Gitter Ω_n heißt (*diskret*) *zusammenhängend*, wenn für alle $x_a, x_e \in \Omega_h$ Gitterpunkte $x_1, \dots, x_m \in \Omega_h$ existieren mit $x_1 \in \text{Schab}(x_a), x_2 \in \text{Schab}(x_1), \dots, x_e \in \text{Schab}(x_m)$. D.h. es gibt einen „inneren Verbindungspfad“ (sonst zerfällt das Gleichungssystem). Folgendes ist also nicht erlaubt:



Die diskrete Aufgabe lautet:

$$\begin{cases} \Lambda u = -\varphi, & x \in \overset{\circ}{\Omega}_h \\ \Lambda^* u = -\varphi, & x \in \Omega_h^* \\ u = \mu, & x \in \Gamma_h \end{cases}$$

und stellt ein (großdimensioniertes) Gleichungssystem dar. Die wichtigste theoretische Frage ist die Untersuchung der Konvergenz.

3.4 Das diskrete Maximumprinzip

(starkes) Maximumprinzip für elliptische Operatoren

betrachte auf beschränktem Ω den Differentialoperator

$$L(u) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} - c(x)u$$

mit stetigen Koeffizienten, $A(x) = (a_{ij}(x))$ auf Ω glm. positiv definit und $c(x) \leq 0$.

Satz 3.1 Sei $u \in C^2(\Omega)$ nicht konstant und erfülle $Lu = f$. Dann gilt:

- 1) Für $f \geq 0$ auf Ω existiert kein positives Maximum von u in Ω .
- 2) Für $f \leq 0$ auf Ω existiert kein negatives Minimum von u in Ω .

Beweis: [Ha1] § 5.1.2

Wir betrachten eine Differenzgleichung in der folgenden Form:

$$a(x)u(x) = \sum_{y \in \text{Schab}(x)} b(x, y)u(y) + f(x), \quad x \in \Omega_h \cup \Gamma_h,$$

wobei das Gitter Ω_h diskret zusammenhängend angenommen wird.

Die Koeffizienten des Schemas $a(x), b(x, y)$ erfüllen:

$$\begin{aligned} a(x) > 0, \quad b(x, y) > 0 \quad \forall x \in \Omega_h, \forall y \in \text{Schab}(x) \quad (\text{vgl. Vorzeichen in (3.2)}) \\ a(x) = 1, \quad b(x, y) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_h \quad (\text{Dirichlet-RB}) \end{aligned}$$

Das Schema kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$d(x)u(x) = \sum_{y \in \text{Schab}(x)} b(x, y)(u(y) - u(x)) + f(x), \quad x \in \Omega_h \cup \Gamma_h$$

mit

$$d(x) = a(x) - \sum_{y \in \text{Schab}(x)} b(x, y)$$

Lemma 3.1 (*diskretes Maximumprinzip*)

Sei $u(x) \neq \text{konst.}$ auf $\Omega_h \cup \Gamma_h$ und $d(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega_h$.

Dann folgt aus

$$Lu(x) := d(x)u(x) - \sum_{y \in \text{Schab}(x)} b(x, y)(u(y) - u(x)) \leq 0$$

(bzw. $Lu(x) \geq 0$) auf Ω_h , dass $u(x)$ den maximalen positiven (bzw. minimalen negativen) Wert nicht auf Ω_h annehmen kann.

Beweis:

Sei $Lu(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega_h$ und

$$u(\bar{x}) = \max_{x \in \Omega_h \cup \Gamma_h} u(x) > 0, \quad \text{für ein } \bar{x} \in \Omega_h$$

Idee: Zeige, daß $u = \text{konst}$ auf $\Omega_h \cup \Gamma_h$ folgt.

Für \bar{x} gilt:

$$Lu(\bar{x}) = d(\bar{x})u(\bar{x}) - \sum_{y \in \text{Schab}(\bar{x})} \overbrace{b(\bar{x}, y)}^{>0} \overbrace{(u(y) - u(\bar{x}))}^{\leq 0} \geq \underbrace{d(\bar{x})}_{\geq 0} \underbrace{u(\bar{x})}_{>0} \geq 0$$

Es gibt damit nur die Möglichkeit $Lu(\bar{x}) = 0$

Diese Bedingung ist nur für

$$d(\bar{x}) = 0 \quad \text{und} \quad u(y) = u(\bar{x}), \quad \forall y \in \text{Schab}(\bar{x})$$

erfüllt.

Da $u(x) \neq \text{konst.}$ angenommen ist, existiert $\bar{\bar{x}} \in \Omega_h \cup \Gamma_h$ mit $u(\bar{x}) > u(\bar{\bar{x}})$ und eine Verbindung $\bar{x}, x_1, \dots, x_m, \bar{\bar{x}}$ mit

$$\begin{aligned} x_1 &\in \text{Schab}(\bar{x}), & u(x_1) &= u(\bar{x}) = \max_{x \in \Omega_h \cup \Gamma_h} u(x) \\ x_2 &\in \text{Schab}(x_1), & u(x_2) &= u(x_1) = u(\bar{x}), \\ &\vdots & & \\ \bar{\bar{x}} &\in \text{Schab}(x_m), & u(x_m) &= \max_{x \in \Omega_h} u(x), & u(\bar{\bar{x}}) &= u(x_m) = u(\bar{x}) \end{aligned}$$

Widerspruch.

□

Folgerung 3.1 Sei $u(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Gamma_h$ und $Lu(x) \geq 0$ auf Ω_h .
Dann ist die Gitterfunktion $u(x)$ nichtnegativ für alle $x \in \Omega_h \cup \Gamma_h$.

Beweis:

Angenommen $\exists \bar{x} \in \Omega_h$ mit $u(\bar{x}) < 0$.

Damit nimmt die Funktion $u(x)$ ein negatives Minimum auf Ω_h an.

Widerspruch.

□

Folgerung 3.2 Die Gleichung

$$\begin{cases} Lu(x) = 0, & x \in \Omega_h \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma_h \end{cases}$$

hat nur die triviale Lösung $u(x) = 0, x \in \Omega_h \cup \Gamma_h$.

$$\Rightarrow \begin{cases} Lu(x) = f, \\ u = \mu(x) \end{cases} \quad \text{ist eindeutig lösbar (Fredholm Alternative)}$$

Folgerung 3.3 Sei

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x), & x \in \Omega_h & & u(x) &= \mu(x), & x \in \Gamma_h \\ L\bar{u}(x) &= \bar{f}(x), & x \in \Omega_h & & \bar{u}(x) &= \bar{\mu}(x), & x \in \Gamma_h \end{aligned}$$

mit $|f(x)| \leq \bar{f}(x), \quad x \in \Omega_h$ und $|\mu(x)| \leq \bar{\mu}(x), \quad x \in \Gamma_h$

Dann gilt $|u(x)| \leq \bar{u}(x) \quad \forall x \in \Omega_h \cup \Gamma_h$

Folgerung 3.4 Für die Lösung der Aufgabe

$$\begin{cases} Lu(x) = 0, & x \in \Omega_h \\ u(x) = \mu(x), & x \in \Gamma_h \end{cases} \quad \text{mit } d(x) = 0, x \in \Omega_h$$

gilt $\|u(x)\|_{\infty, \Omega_h \cup \Gamma_h} \leq \|\mu(x)\|_{\infty, \Gamma_h}$

Beweis:

Betrachte $\bar{\mu}(x) = \text{konst.} = \|\mu(x)\|_{\infty, \Gamma_h}$

$\bar{f}(x) = 0, x \in \Omega_h$.

Es gilt offenbar $\bar{u}(x) = \|\mu(x)\|_{\infty, \Gamma_h} = \text{konst.}$ (Vergleichslösung für Folgerung 3.3) und damit die Behauptung. (mit Folgerung 3.3) \square

Folgerung 3.5 Für die Lösung der Aufgabe

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in \Omega_h \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma_h \end{cases} \quad (3.5)$$

mit $d(x) > 0, x \in \Omega_h$ gilt:

$$\|u(x)\|_{\infty, \Omega_h \cup \Gamma_h} \leq \|D^{-1}f\|_{\infty, \Omega_h}, \quad D = \text{diag}(d(x), x \in \Omega_h)$$

Beweis:

Wir betrachten die Funktionen

$$\bar{f}(x) := |f(x)| \geq f(x) \quad \forall x \in \Omega_h, \quad \bar{\mu}(x) = \mu(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_h$$

Die Lösung der Aufgabe

$$\begin{cases} L\bar{u}(x) = \bar{f}(x) & x \in \Omega_h \\ \bar{u}(x) = 0 & x \in \Gamma_h \end{cases}$$

ist nichtnegativ: $\bar{u}(x) \geq 0, x \in \Omega_h \cup \Gamma_h$. (Folgerung 3.1)

Sei $\bar{x}: \bar{u}(\bar{x}) = \|\bar{u}(x)\|_{\infty, \Omega_h \cup \Gamma_h}$.

In \bar{x} gilt:

$$\underbrace{d(\bar{x})}_{>0} \underbrace{\bar{u}(\bar{x})}_{\geq 0} - \sum_{y \in \text{Schab}(\bar{x})} \underbrace{b(\bar{x}, y)}_{>0} \underbrace{(\bar{u}(y) - \bar{u}(\bar{x}))}_{\leq 0} = |f(\bar{x})|$$

und damit

$$\bar{u}(\bar{x}) \leq \frac{|f(\bar{x})|}{d(\bar{x})} \leq \max_{x \in \Omega_h} \frac{|f(x)|}{d(x)} = \|D^{-1}f\|_{\infty, \Omega_h} \quad (3.6)$$

\Rightarrow Behauptung mit Folgerung 3.3 \square

Folgerung 3.6 Sei

$$\begin{aligned} d(x) &= 0, & x \in \overset{\circ}{\Omega}_h & \text{ und } d(x) > 0, & x \in \Omega_h^* \\ f(x) &= 0, & x \in \overset{\circ}{\Omega}_h & \text{ und } \mu(x) = 0, & x \in \Gamma_h \end{aligned}$$

Für die Lösung von (3.5) gilt dann: $\|u(x)\|_{\infty, \Omega_h \cup \Gamma_h} \leq \|\tilde{D}f\|_{\infty, \Omega_h}$, wobei $\tilde{D} := \text{diag}(0; x \in \overset{\circ}{\Omega}_h, \frac{1}{d(x)} : x \in \Omega_h^*)$

Beweis:

Sei $\bar{f}(x) = |f(x)|$, $x \in \Omega_h$; $\bar{\mu}(x) = 0$, $x \in \Gamma_h$

Die Lösung $\bar{u}(x)$ ist nichtnegativ $\forall x \in \Omega_h \cup \Gamma_h$ (aus Folgerung 3.1)

Wähle \bar{x} so, dass $\bar{u}(\bar{x}) = \|\bar{u}(x)\|_{\infty, \Omega_h \cup \Gamma_h}$.

- Falls $\bar{x} \in \Omega_h^*$, dann setze $\bar{\bar{x}} = \bar{x}$.
- Andernfalls (d.h. für $\bar{x} \in \overset{\circ}{\Omega}_h$) gilt:

$$\underbrace{d(\bar{x})}_{=0} \underbrace{\bar{u}(\bar{x})}_{>0} - \sum_{y \in \text{Schab}(\bar{x})} \underbrace{b(\bar{x}, y)}_{>0} \underbrace{(\bar{u}(y) - \bar{u}(\bar{x}))}_{\leq 0} = \bar{f}(\bar{x}) = 0 \quad (3.7)$$

d.h. $\bar{u}(\bar{x}) = \bar{u}(y) \quad \forall y \in \text{Schab}(\bar{x})$.

Wähle $\bar{\bar{x}} \in \Omega_h^*$ so, dass $\bar{\bar{x}}, x_1, \dots, x_m, \bar{x}$ eine Verbindung mit $x_j \in \overset{\circ}{\Omega}_h$; $j = 1, \dots, m$ ist. Für x_m gilt analog zu (3.7):

$$\bar{u}(x_m) = \|\bar{u}(x)\|_{\infty, \Omega_h \cup \Gamma_h} = \bar{u}(y) \quad \forall y \in \text{Schab}(x_m)$$

$$\Rightarrow \bar{u}(\bar{\bar{x}}) = \|\cdot\|.$$

Schliesslich erhalten wir:

$$\|u(x)\|_{\infty, \Omega_h \cup \Gamma_h} \stackrel{\text{Folg. 3.3}}{\leq} \|\bar{u}(x)\|_{\infty, \Omega_h \cup \Gamma_h} = \bar{u}(\bar{\bar{x}}) \stackrel{(3.6)}{\leq} \frac{\bar{f}(\bar{\bar{x}})}{d(\bar{\bar{x}})} \leq \|\tilde{D}f(x)\|_{\infty, \Omega_h}$$

□

3.5 Stabilität und Konvergenz

Wir betrachten das 5-Punkt Schema ($\rightarrow d(x) = 0, x \in \Omega_h$)

$$\begin{cases} \Lambda u(x) = -\varphi(x), & x \in \overset{\circ}{\Omega}_h \\ \Lambda^* u(x) = -\varphi(x), & x \in \Omega_h^* \\ u(x) = \mu(x), & x \in \Gamma_h, \end{cases} \text{ oder}$$

$$Lu = f, x \in \Omega_h, u = \mu, x \in \Gamma_h$$

Die Lösung $u(x)$ kann man wie folgt aufspalten:

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x)$$

$$\text{mit } Lu_1 = f, u_1|_{\Gamma_h} = 0; \quad Lu_2 = 0, u_2|_{\Gamma_h} = \mu.$$

Für die Funktion $u_2(x)$ gilt (Folgerung 3.4)

$$\|u_2(x)\|_{\infty, \Omega_h} \leq \|\mu(x)\|_{\infty, \Gamma_h}$$

Die rechte Seite f wird ebenfalls aufgespalten:

$$f(x) = \overset{\circ}{f}(x) + f^*(x) \text{ mit}$$

$$\overset{\circ}{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \overset{\circ}{\Omega}_h, \\ 0, & x \in \Omega_h^*, \end{cases}$$

$$f^*(x) = f(x) - \overset{\circ}{f}(x).$$

Die Funktion $u_1(x)$ zerlegt sich damit in

$$u_1(x) = \overset{\circ}{u}_1(x) + u_1^*(x)$$

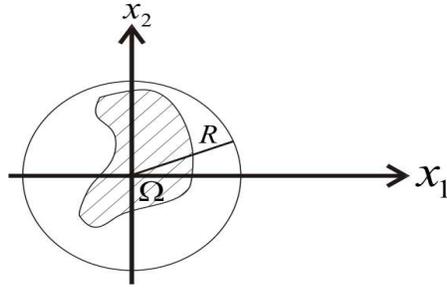
$$L \overset{\circ}{u}_1 = \overset{\circ}{f}, \overset{\circ}{u}_1|_{\Gamma_h} = 0; \quad Lu_1^* = f^*, u_1^*|_{\Gamma_h} = 0$$

Abschätzung von $\overset{\circ}{u}_1$:

Wir betrachten die folgende Funktion (Vergleichsfunktion für Folgerung 3.3)

$$\bar{u}(x) = \alpha(R^2 - x_1^2 - x_2^2),$$

wobei $\alpha > 0$ und $R \geq |x|, \forall x \in \Omega$ gilt:



Es gilt:

$$\begin{aligned} \Lambda \bar{u}(x) &= -\alpha \Lambda(x_1^2 + x_2^2) = -\alpha \left[\frac{(x_1+h_1)^2 - 2x_1^2 + (x_1-h_1)^2}{h_1^2} + \frac{(x_2+h_2)^2 - 2x_2^2 + (x_2-h_2)^2}{h_2^2} \right] \\ &= -4\alpha =: -\bar{f}(x), \quad x \in \overset{\circ}{\Omega}_h \\ \Lambda^* \bar{u}(x) &= -\alpha \Lambda^*(x_1^2 + x_2^2) = -\alpha \left[\frac{1}{\tilde{h}_1} \left(\frac{(x_1+h_1^+)^2 - x_1^2}{h_1^+} - \frac{x_1^2 - (x_1-h_1^-)^2}{h_1^-} \right) + \dots \right] \\ (\text{z.B. } \tilde{h}_1 &= \frac{h_1^+ + h_1^-}{2}) \quad = -\alpha \left(\frac{h_1^+ + h_1^-}{h_1} + \frac{h_2^+ + h_2^-}{h_2} \right) =: -\bar{f}(x), \quad x \in \Omega_h^* \end{aligned}$$

Die Aufgabe

$$L\bar{u} = \bar{f}, \quad x \in \Omega_h \quad \bar{u}(x) = \alpha(R^2 - x_1^2 - x_2^2), \quad x \in \Gamma_h$$

hat dann die gewünschte Lösung $\bar{u}(x)$.

Laut Konstruktion gilt $\bar{u}(x) \geq 0$ für alle $x \in \Gamma_h$.

Für $\alpha := \frac{1}{4} \|\overset{\circ}{f}(x)\|_{\infty, \Omega_h}$ gilt

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &\geq |\overset{\circ}{f}(x)|, \quad x \in \Omega_h \\ \bar{u}(x) &\geq 0, \quad x \in \Gamma_h \quad \text{d.h. (Folgerung 3.3)} \end{aligned}$$

$$\|\overset{\circ}{u}_1(x)\|_{\infty, \Omega_h} \leq \|\bar{u}(x)\|_{\infty, \Omega_h} \leq \alpha R^2 = \frac{R^2}{4} \|\overset{\circ}{f}\|_{\infty, \Omega_h}$$

Abschätzung von u_1^* :

Für $x \in \overset{\circ}{\Omega}_h$ gilt $d(x) = 0$.

Für $x \in \Omega_h^*$ gilt $d(x) = 0$, aber wegen $u_1^*|_{\Gamma_h} = 0$ ist Modifikation der Schablone möglich (ohne Änderung des Schemas):

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Schab}}(x) &:= \text{Schab}(x) - (\Gamma_h \cap \text{Schab}(x)) \\ \Rightarrow \tilde{d}(x) &= a(x) - \sum_{y \in \widetilde{\text{Schab}}(x)} b(x, y) = \sum_{y \in \text{Schab}(x), y \in \Gamma_h} b(x, y) \geq \frac{1}{\tilde{h}^2}, \quad \tilde{h} := \max(h_1, h_2) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir mit Folgerung 3.6:

$$\|u_1^*(x)\|_{\infty, \Omega_h} \leq \|\tilde{D}f^*(x)\|_{\infty, \Omega_h} \leq \tilde{h}^2 \|f^*(x)\|_{\infty, \Omega_h}$$

Damit haben wir das folgende Lemma bewiesen:

Lemma 3.2 (*l^∞ -Stabilität des 5-Punkte-Schemas bzgl. rechter Seite und Randbedingungen*)

Die diskrete Lösung der Dirichlet-Aufgabe erfüllt

$$\|u(x)\|_{\infty, \Omega_h \cup \Gamma_h} \leq \|\mu\|_{\infty, \Gamma_h} + \frac{R^2}{4} \|\varphi\|_{\infty, \overset{\circ}{\Omega}_h} + \tilde{h}^2 \|\varphi\|_{\infty, \Omega_h^*}$$

mit $R \geq |x|$, $\forall x \in \Omega$; $\tilde{h} := \max(h_1, h_2)$

Diese Abschätzung bedeutet die *Stabilität* des Schemas in der l^∞ -Norm bzgl. der Randbedingungen und der rechten Seite.

Für den Fehler $e_{j,l} := u_{j,l} - u(x_{1,j}, x_{2,l})$ gilt die Gleichung

$$\begin{cases} \Lambda e = -\psi, & x \in \overset{\circ}{\Omega}_h, & \psi(x) = O(\tilde{h}^2) & \dots \text{Approximationsfehler des 5-P-Schemas im Inneren (für } u \text{ glatt)} \\ \Lambda^* e = -\psi, & x \in \Omega_h^*, & \psi(x) = O(1) & \text{(Approximationsfehler in randnahen Knoten; konservative Annahme} \\ e = 0, & x \in \Gamma_h & & \text{reicht für Bew; vgl. (3.3),(3.4))} \end{cases}$$

und damit die *Konvergenz* des Schemas (unter der Annahme $u \in C^4(\bar{\Omega})$):

$$\|e(x)\|_{\infty, \Omega_h \cup \Gamma_h} \leq \frac{R^2}{4} \|\psi(x)\|_{\infty, \overset{\circ}{\Omega}_h} + \tilde{h}^2 \|\psi(x)\|_{\infty, \Omega_h^*} = O(\tilde{h}^2)$$

3.6 Die Dirichlet-Aufgabe im Rechteck

Kontinuierliche Aufgabe:

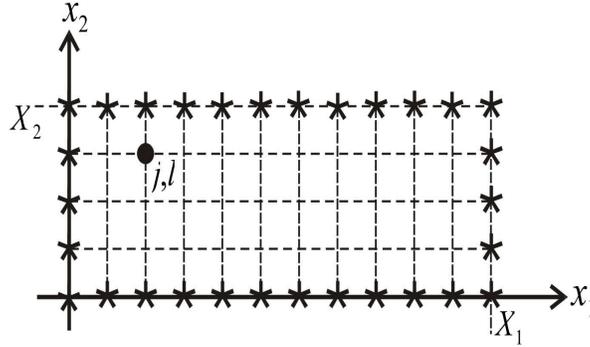
$$\begin{cases} \Delta u = -f, & x \in \Omega = (0, X_1) \times (0, X_2) \\ u = \mu, & x \in \partial\Omega = \Gamma \end{cases}$$

Diskretisierung:

$$\begin{cases} \Lambda u = -\varphi, & x \in \Omega_h \\ u = \mu, & x \in \Gamma_h \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\Lambda u = \frac{u_{j+1,l} - 2u_{j,l} + u_{j-1,l}}{h_1^2} + \frac{u_{j,l+1} - 2u_{j,l} + u_{j,l-1}}{h_2^2} = \Lambda_1 u + \Lambda_2 u$$

mit $h_1 = \frac{X_1}{J}$, $h_2 = \frac{X_2}{L}$, $j = 0, 1, \dots, J$; $l = 0, 1, \dots, L$



- Das Schema ist zu folgendem Gleichungssystem äquivalent:

$Au = b$ mit

$$A = \text{blocktridiag}(C, B, C) \in \mathbb{R}^{(L-1)(J-1) \times (L-1)(J-1)}$$

$$B = \text{tridiag}\left(-\frac{1}{h_1^2}, \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}, -\frac{1}{h_1^2}\right) \in \mathbb{R}^{(J-1) \times (J-1)}$$

$$C = \text{diag}\left(-\frac{1}{h_2^2}\right) \in \mathbb{R}^{(J-1) \times (J-1)}$$

und

$$b(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in \overset{\circ}{\Omega}_h \\ \varphi(x) + \frac{\mu(x_1 \pm h_1, x_2)}{h_1^2} & j = 1, J-1; l = 2, \dots, L-2 \\ \varphi(x) + \frac{\mu(x_1, x_2 \pm h_2)}{h_2^2} & j = 2, \dots, J-2; l = 1, L-1 \\ \varphi(x) + \frac{\mu(x_1 \pm h_1, x_2)}{h_1^2} + \frac{\mu(x_1, x_2 \pm h_2)}{h_2^2} & j = 1, J-1; l = 1, L-1 \end{cases}$$

$$(-\Lambda \hat{=}) A = \left[\begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}, & -\frac{1}{h_1^2} \\ -\frac{1}{h_1^2} & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h_1^2} \\ & & -\frac{1}{h_1^2} & \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \end{matrix}}^{=B} & \overbrace{\begin{matrix} -\frac{1}{h_2^2} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{h_2^2} \end{matrix}}^{=C} \\ \hline \boxed{C} & \\ & \ddots \\ & \boxed{C} \quad \boxed{B} \end{array} \right]$$

Unter der Annahme: Zeilenweise Nummerierung in Ω_h , d.h.

$$\begin{aligned} u^T &= (u_{1,1}; u_{2,1}; \dots; u_{J-1,1}; u_{1,2}; \dots; u_{J-1,L-1}) \\ b^T &= (\varphi_{1,1} + \frac{\mu_{1,0}}{h_1^2} + \frac{\mu_{1,0}}{h_2^2}; \varphi_{2,1} + \frac{\mu_{2,0}}{h_2^2}; \dots) \end{aligned}$$

- Das Gleichungssystem $Au = b$

- 1) großdimensioniert: $N = (J-1)(L-1) \approx 10^3 - 10^5$
- 2) schwachbesetzt: nur 3,4 oder 5 Elemente pro Zeile $\neq 0$
- 3) schlecht konditioniert (siehe (3.9),(3.10) unten):

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &= \lambda_{(1,1)} \approx \pi^2 \left(\frac{1}{X_1^2} + \frac{1}{X_2^2} \right) = O(1), \quad \tilde{h} := \max(h_1, h_2) \rightarrow 0 \\ \lambda_{\max} &= \lambda_{(J-1,L-1)} \approx 4 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) = O(\tilde{h}^{-2}) \\ \kappa_2(A) &= \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = O(\tilde{h}^{-2}), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

⇒ Für die iterative Lösung von $Au = b$ ist eine Vorkonditionierung erforderlich.

D.h. je feiner die Auflösung, desto schwieriger die Lösung des Gleichungssystems.

- 4) besonders strukturiert.

Effiziente Lösung von (3.8) mit FFTs:

- Wir betrachten das folgende *Eigenwertproblem*:

$$\begin{cases} \Lambda v + \lambda v &= 0, \quad x \in \Omega_h \\ v &= 0, \quad x \in \Gamma_h \end{cases}$$

und suchen die Lösung in der Form

$$v_{j,l}^m = w_j^{m_1} z_l^{m_2}, \quad m = (m_1, m_2) \quad (\text{diskreter Separationsansatz})$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} (\Lambda v^m)_{jl} &= z_l^{m_2} \Lambda_1 w_j^{m_1} + w_j^{m_1} \Lambda_2 z_l^{m_2} = -\lambda_m w_j^{m_1} z_l^{m_2} \\ w_0^{m_1} &= w_J^{m_1} = z_0^{m_2} = z_L^{m_2} = 0 \end{aligned}$$

Damit ist das EW-Problem separiert in

$$\frac{\Lambda_1 w_j^{m_1}}{w_j^{m_1}} = -\frac{\Lambda_2 z_l^{m_2}}{z_l^{m_2}} - \omega_{m_1} - \xi_{m_2}, \quad \lambda_m = \omega_{m_1} + \xi_{m_2}$$

oder:

$$\boxed{\begin{array}{l} \Lambda_1 w^{m_1} + \omega_{m_1} w^{m_1} = 0 \\ \Lambda_2 z^{m_2} + \xi_{m_2} z^{m_2} = 0 \end{array}}$$

Die Lösung dieser Eigenwertprobleme ist bekannt:

$$w_j^{m_1} = \sqrt{\frac{2}{X_1}} \sin \frac{m_1 \pi j}{J}, \quad j = 0, 1, \dots, J \quad \omega_{m_1} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{m_1 \pi}{2J} \quad (3.9)$$

$$z_l^{m_2} = \sqrt{\frac{2}{X_2}} \sin \frac{m_2 \pi l}{L}, \quad l = 0, 1, \dots, L \quad \xi_{m_2} = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{m_2 \pi}{2L} \quad (3.10)$$

$$m_1 = 1, \dots, J-1 \quad m_2 = 1, \dots, L-1$$

Die Lösung des gesamten EW-Problems ist dann:

$$\begin{aligned} v_{jl}^m &= \frac{2}{\sqrt{X_1 X_2}} \sin \frac{m_1 \pi j}{J} \sin \frac{m_2 \pi l}{L} \\ \lambda_m &= \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{m_1 \pi}{2J} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{m_2 \pi}{2L} \end{aligned} \quad m = (m_1, m_2)$$

Wenn man das Skalarprodukt als

$$\langle u, v \rangle = h_1 h_2 \sum_{x \in \Omega_h \cup \Gamma_h} u(x) v(x)$$

definiert, dann sind die Eigenvektoren orthonormal und vollständig in $\mathbb{R}^{(J-1) \times (L-1)}$:

$$\langle v^n, v^m \rangle = \delta_{n,m}$$

- Eine (diskrete) Lösungsmethode für (3.8) basiert auf der Benutzung von FFTs („Fast Fourier Transform“):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_m \varphi_m v^m(x), \\ \varphi_m &= \langle \varphi, v^m \rangle = \frac{2h_1 h_2}{\sqrt{X_1 X_2}} \sum_{\substack{j,l \\ =f(x_{jl})}} \underbrace{\varphi_{jl}} \sin \frac{m_1 \pi j}{J} \sin \frac{m_2 \pi l}{L} \end{aligned}$$

Entwicklung der Lösung $u(x)$ von (3.8) mit $\mu = 0$ in der Basis v^m :

$$u(x) = \sum_m u_m v^m(x) \quad (3.11)$$

$$\Rightarrow \Lambda u = \sum_m u_m \Lambda v^m = - \sum_m u_m \lambda_m v^m = - \sum_m \varphi_m v^m$$

Damit gilt: $u_m = \frac{\varphi_m}{\lambda_m}$ und aus (3.11):

$$u_{jl} = \frac{2h_1 h_2}{\sqrt{X_1 X_2}} \sum_{m_1, m_2} \frac{\varphi_m}{\lambda_m} \sin \frac{m_1 \pi j}{J} \sin \frac{m_2 \pi l}{L}$$

- Der *numerische Aufwand* beträgt (falls $J = 2^{\tilde{J}}, L = 2^{\tilde{L}}$)

$$O(\underbrace{L \cdot J \log_2 J}_{\text{für } \Sigma_j} + \underbrace{J \cdot L \log_2 L}_{\text{für } \Sigma_l}) = O(N \log_2 N)$$

und ist damit fast optimal! (vgl. linearer Aufwand in 1D, da A dann tridiagonal)

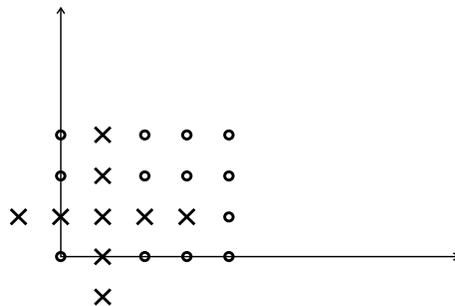
3.7 Diskretisierungen höherer Ordnung

Ziel: genauere Diskretisierung für Poisson Gleichung

- Der Differenzenstern

$$\frac{1}{12h^2} \begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & & -16 & & \\ 1 & -16 & 60 & -16 & 1 \\ & & -16 & & \\ & & 1 & & \end{bmatrix}$$

ist *vierter Ordnung* für $-\Delta$ aber für randnahe Punkte unpraktisch.



\Rightarrow betrachten nur *kompakte Schemata*, d.h. nur $|\tilde{j} - j| \leq 1, |\tilde{l} - l| \leq 1$ in Schablone.

- \nexists kompakte Neunpunkteformel 3. Ordnung für Δ .
- Ausweg: verwende andere (und zwar L -abhängige) Diskretisierung als $\varphi_{jl} = f(x_{jl})$

Konstruktion: Sei $u(x)$ eine Lösung von $\Delta u(x) = -f(x)$ und genügend glatt. Es gilt:

$$Lu(x) = \Delta u(x) = L_1 u(x) + L_2 u(x), \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$$

Die *Fünfpunkteformel* ist:

$$\Lambda u = \Lambda_1 u + \Lambda_2 u, \quad \Lambda_\alpha u = D_{x_\alpha}^2 u$$

Aus der Taylorformel folgt

$$\Lambda u - \Delta u = \frac{h_1^2}{12} L_1^2 u + \frac{h_2^2}{12} L_2^2 u + O(h^4).$$

Aus der Gleichung $Lu = -f$ folgt ($Lu = L_1 u + L_2 u = -f$)

$$L_1^2 u = -L_1 f - L_1 L_2 u, \quad L_2^2 u = -L_2 f - L_2 L_1 u$$

oder (da L_1 und L_2 kommutieren)

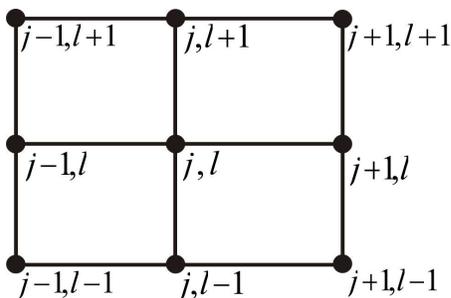
$$\Lambda u - \Delta u = -\frac{h_1^2}{12} L_1 f - \frac{h_2^2}{12} L_2 f - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} L_1 L_2 u + O(h^4).$$

- Der Operator $L_1 L_2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$ kann wie folgt approximiert werden:

$$L_1 L_2 u \approx \Lambda_1 \Lambda_2 u = D_{x_1}^2 D_{x_2}^2 u$$

Dieser *Differenzenoperator* ist auf 9 Punkten definiert:

$$\Lambda_1 \Lambda_2 u = \frac{1}{h_1^2 h_2^2} [u_{j-1,l-1} - 2u_{j,l-1} + u_{j+1,l-1} - 2u_{j-1,l} + 4u_{j,l} - 2u_{j+1,l} + u_{j+1,l-1} - 2u_{j,l+1} + u_{j+1,l+1}]$$



und hat 2. Approximationsordnung: $L_1 L_2 u - \Lambda_1 \Lambda_2 u = O(h^2)$.

Damit approximiert die Gleichung

$$\left[\Lambda + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 \right] u = - \left[f + \frac{h_1^2}{12} L_1 f + \frac{h_2^2}{12} L_2 f \right]$$

die Ausgangsgleichung mit $O(h^4)$!

Es ist möglich, die Ableitungen von f ebenfalls durch die Differenzenquotienten zu ersetzen:

$$L_1 f = \Lambda_1 f + O(h_1^2), \quad L_2 f = \Lambda_2 f + O(h_2^2)$$

Damit:

$$\Lambda' u = -\varphi \quad \text{mit} \quad \Lambda' = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{1}{12}(h_1^2 + h_2^2)\Lambda_1\Lambda_2, \quad \varphi = f + \frac{h_1^2}{12}\Lambda_1 f + \frac{h_2^2}{12}\Lambda_2 f$$

Lemma 3.1 (*Einbettungssatz*)

Sei $u(x)$ eine Gitterfunktion auf $\Omega_h \cup \Gamma_h$ mit

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_h, \quad \Omega_h = \{(jh_1, lh_2), j = 1, \dots, J-1; l = 1, \dots, L-1\}$$

Dann gilt die Abschätzung

$$\|u(x)\|_{\infty, \Omega_h \cup \Gamma_h} \leq M \|\Lambda u(x)\|_2$$

mit

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_\alpha u = D_{x_\alpha}^2 u, \quad M = \frac{\max(X_1, X_2)^2}{2\sqrt{X_1 \cdot X_2}} \quad (\text{also unabh. von } h_1, h_2)$$

Bem: vgl. Sobolev-Einbettung $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

mit

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\Omega) \|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Für $u|_{\partial\Omega} = 0$ sind $\|u\|_{H^2(\Omega)}$ und $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ äquivalente Normen (vgl. § 8.4, 8.5, PDGI).

Beweis:

Die Vektoren

$$v_{jl}^m = \frac{2}{\sqrt{X_1 X_2}} \sin \frac{m_1 \pi j}{J} \sin \frac{m_2 \pi l}{L}, \quad m = (m_1, m_2)$$

bilden eine *ONB*, und daher

$$u(x) = \sum_m u_m v^m, \quad Au(x) = \sum_m u_m \lambda_m v^m,$$

$$\|Au\|_2^2 = \sum_m \lambda_m^2 u_m^2, \quad \|u\|_2^2 = \sum_m u_m^2$$

Für die Funktion $u(x)$ gilt damit

$$|u(x)| \leq \sum_m |u_m| \cdot \max_m |v^m(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{X_1 X_2}} \sum_m |u_m|.$$

Die *Schwarzsche Ungleichung* liefert

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq \frac{4}{X_1 X_2} \left(\sum_m |u_m| \right)^2 = \frac{4}{X_1 X_2} \left(\sum_m |\lambda_m u_m| \cdot \frac{1}{|\lambda_m|} \right)^2 \\ &\leq \frac{4}{X_1 X_2} \sum_m \lambda_m^2 u_m^2 \cdot \sum_m \frac{1}{\lambda_m^2} = \frac{4}{X_1 X_2} \|Au\|_2^2 \cdot \sum_m \frac{1}{\lambda_m^2} \end{aligned}$$

- Damit verbleibt es, die Summe $\sum_m \lambda_m^{-2}$ abzuschätzen. Es gilt

$$\lambda_m = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{m_1 \pi}{2J} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{m_2 \pi}{2L}$$

$$h_1 = \frac{X_1}{J}, \quad h_2 = \frac{X_2}{L}; \quad \varphi_1 = \frac{m_1 \pi}{2J}, \quad \varphi_2 = \frac{m_2 \pi}{2L} \in (0, \frac{\pi}{2})$$

und damit (sei $X_0 = \max(X_1, X_2)$)

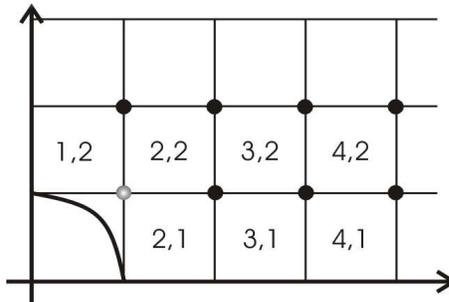
$$\lambda_m = \frac{m_1^2 \pi^2}{X_1^2} \left(\frac{\sin \varphi_1}{\varphi_1} \right)^2 + \frac{m_2^2 \pi^2}{X_2^2} \left(\frac{\sin \varphi_2}{\varphi_2} \right)^2 \geq 4 \left(\frac{m_1^2}{X_1^2} + \frac{m_2^2}{X_2^2} \right) \geq \frac{4}{X_0^2} (m_1^2 + m_2^2)$$

Wir haben benutzt, dass die Funktion $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$ monoton fallend ist:

$$\frac{\sin \varphi}{\varphi} \geq \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \quad \forall \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Damit ergibt sich eine Abschätzung für

$$\sum_{m \neq (1,1)} \lambda_m^{-2} \leq \frac{X_0^4}{16} \sum_{m \neq (1,1)} (m_1^2 + m_2^2)^{-2} \leq \frac{X_0^4}{16} \int_1^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{-4} r \, d\varphi \, dr = \frac{\pi X_0^4}{64}$$



- Für $\lambda_{(1,1)}$ gilt aber:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{(1,1)} &= \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi}{2J} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi}{2L} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi h_1}{2X_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi h_2}{2X_2} \\
 &= \frac{4X_1^2}{\pi^2 h_1^2} \cdot \frac{\pi^2}{X_1^2} \sin^2 \frac{\pi h_1}{2X_1} + \frac{4X_2}{\pi^2 h_2^2} \frac{\pi^2}{X_2^2} \sin^2 \frac{\pi h_2}{2X_2} \\
 &\geq \frac{\pi^2}{X_1^2} \cdot \frac{8}{\pi^2} + \frac{\pi^2}{X_2^2} \frac{8}{\pi^2} = \frac{8}{X_1^2} + \frac{8}{X_2^2} \geq \frac{16}{X_0^2}
 \end{aligned}$$

Wir haben dabei benutzt, dass

$$h_\alpha \leq \frac{1}{2}X_\alpha, \quad \varphi_\alpha := \frac{\pi h_\alpha}{2X_\alpha} \leq \frac{\pi}{4}, \quad \left(\frac{\sin \varphi_\alpha}{\varphi_\alpha} \right)^2 \geq \left(\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \right)^2 = \frac{8}{\pi^2}$$

- Die Zusammenfassung ergibt:

$$\sum_m \lambda_m^{-2} = \lambda_{(1,1)}^{-2} + \sum_{m \neq (1,1)} \lambda_m^{-2} \leq \frac{X_0^4}{16^2} + \frac{\pi X_0^4}{64} = \frac{X_0^4}{64} \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \pi \right)}_{\leq 4} \leq \frac{X_0^4}{16}$$

Die endgültige Abschätzung lautet damit:

$$\begin{aligned}
 \|u(x)\|_{\infty, \Omega_h \cup \Gamma_h} &\leq \frac{2}{\sqrt{X_1 X_2}} \|Au(x)\|_2 \cdot \frac{X_0^2}{4} \\
 &= \underbrace{\frac{X_0^2}{2\sqrt{X_1 X_2}}}_{=M} \|Au(x)\|_2
 \end{aligned}$$

□

Jetzt sind wir in der Lage, die Konvergenz des Schemas höherer Ordnung zu zeigen.

Satz 3.2 (Konvergenz des Schemas höherer Ordnung)

Sei $u \in C^6(\bar{\Omega})$. \Rightarrow Das Schema

$$\begin{cases} \Lambda' u(x) = -\varphi(x), & x \in \Omega_h \\ u(x) = \mu(x), & x \in \Gamma_h \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \Lambda' &= \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{1}{12}(h_1^2 + h_2^2)\Lambda_1\Lambda_2 \\
 \varphi &= f + \frac{1}{12}h_1^2\Lambda_1 f + \frac{1}{12}h_2^2\Lambda_2 f
 \end{aligned}$$

ist von vierter Konvergenzordnung.

Beweis:

Für den Fehler $e = u_{jl} - u(x_{1,j}, x_{2,l})$ gilt die Gleichung

$$\begin{cases} \Lambda' e = -\Psi, & \Psi = O(h^4), & x \in \Omega_h \\ e = 0, & & x \in \Gamma_h \end{cases}$$

Sei U_h der Vektorraum der Gitterfunktionen, die nur im Inneren (d.h. auf Ω_h) definiert sind und 0 auf Γ_h sind.

Sei $A_\alpha y = -\Lambda_\alpha y$, $y \in U_h$, $\alpha = 1, 2$:

A_α sind lineare Operatoren $A_\alpha : U_h \rightarrow U_h$ mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} A_\alpha &= A_\alpha^* > 0, \text{ d.h. } (A_\alpha u, v) = (u, A_\alpha v) \quad \forall u, v \in U_h \\ (A_\alpha u, u) &\geq \lambda_1^{(\alpha)}(u, u) \\ \lambda_1^{(\alpha)} &= \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2X_d} \geq \frac{8}{X_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2 \\ A_1 A_2 &= A_2 A_1, \quad A_1 A_2 = (A_1 A_2)^* > 0 \\ (A_\alpha u, u) &\leq \lambda_{N_\alpha-1}^{(\alpha)}(u, u), \quad \lambda_{N_\alpha-1}^{(\alpha)} \leq \frac{4}{h_\alpha^2}, \quad \|A_\alpha\|_2 \leq \frac{4}{h_\alpha^2}; \quad N_1 = J, \quad N_2 = L \end{aligned}$$

Die Gleichung für e auf Ω_h lautet damit

$$\underbrace{A_1 e + A_2 e - (\chi_1 + \chi_2) A_1 A_2 e}_{=A'e} = \Psi, \quad \chi_\alpha = \frac{h_\alpha^2}{12}$$

Ziel: Abschätzung von A' (h -unabhängig)

Es gilt

$$\chi_1 A_1 A_2 + \chi_2 A_1 A_2 = (\chi_1 A_1) A_2 + (\chi_2 A_2) A_1 \leq \frac{h_1^2}{12} \cdot \frac{4}{h_1^2} A_2 + \frac{h_2^2}{12} \cdot \frac{4}{h_2^2} A_1 = \frac{1}{3} (A_1 + A_2)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} (A_1 + A_2) &\leq \underbrace{A_1 + A_2 - (\chi_1 + \chi_2) A_1 A_2}_{A'} \leq A_1 + A_2 \\ \|\frac{2}{3} \underbrace{(A_1 + A_2)}_{-\Lambda} e\|_2 &\leq \|A'e\|_2 = \|\Psi\|_2 \end{aligned}$$

Der *Einbettungssatz* liefert dann

$$\|e(x)\|_{\infty, \Omega_h \cup \Gamma_h} \leq \frac{X_0^2}{2\sqrt{X_1 X_2}} \|\Lambda e\|_2 \leq \frac{3X_0^2}{4\sqrt{X_1 X_2}} \underbrace{\|A'e\|_2}_{=\|\Psi\|_2} = O(h^4)$$

$$X_0 = \max(X_1, X_2)$$

□

Bemerkung: (→ Übung)

Wir schreiben die Gleichung $\Lambda'u = -\varphi$ in der Form des *Maximumprinzips* um, d.h.

$$a(x)u(x) = \sum_{y \in \text{Schab}(x)} b(x, y)u(y) + \varphi(x), \quad x = (jh_1, lh_2),$$

mit

$$a(x) = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} - \frac{1}{12}(h_1^2 + h_2^2) \frac{4}{h_1^2 h_2^2} = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) > 0,$$

$$b(x, y) = \frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{12}(h_1^2 + h_2^2) \frac{2}{h_1^2 h_2^2} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right), \quad j \pm 1, l \text{ (analog für } j, l \pm 1),$$

$$b(x, y) = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_1^2} \right), \quad j \pm 1, l \pm 1.$$

Dann werden die Bedingungen des Maximumprinzips ($b \geq 0$) nur für

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}$$

erfüllt, d.h. es gibt Einschränkungen an h_1, h_2 !

- Nachteil von Differenzverfahren:
hohe Regularität von u nötig; Anwendung schwierig, wenn f unstetig.
⇒ FEM (§6) vermeidet einige dieser Nachteile.

Ref: [Bra] § 3, [Ha1] § 4, [GR] § 5.2

4 Eine Einführung in die Theorie der Sobolev-Räume

4.1 Die verallgemeinerte Ableitung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit $\Gamma = \partial\Omega$, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$, $\Omega \neq \emptyset$.

Definition 4.1 (*Testfunktion*)

Als $C_0^\infty(\Omega)$ wird der Raum aller beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω bezeichnet:

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) := \left\{ u \in C^\infty(\Omega), \text{supp } u \text{ ist kompakt, } \underbrace{\text{supp } u}_{\text{abg.}} \subset \underbrace{\Omega}_{\text{offen}} \right\}$$

$\Rightarrow \text{supp } u \cap \Gamma = \emptyset$; der Träger liegt im Inneren von Ω .

Notation (Multiindex):

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{N}_0^d, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i, \quad \partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

Wir führen in $C_0^\infty(\Omega)$ folgende *Konvergenz* ein:

Definition 4.2 Die Folge $\{\varphi_n\}$ konvergiert gegen Null in $\mathcal{D}(\Omega)$ genau dann, wenn

- 1) $\exists K \in \Omega$, K kompakt; $\text{supp } \varphi_n \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- 2) $\partial^\alpha \varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gleichmäßig auf K $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$.

Definition 4.3 Die Funktion $w \in L_{loc}^1(\Omega)$ heißt (schwache oder) verallgemeinerte Ableitung der Ordnung $|\alpha|$ der Funktion $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, falls

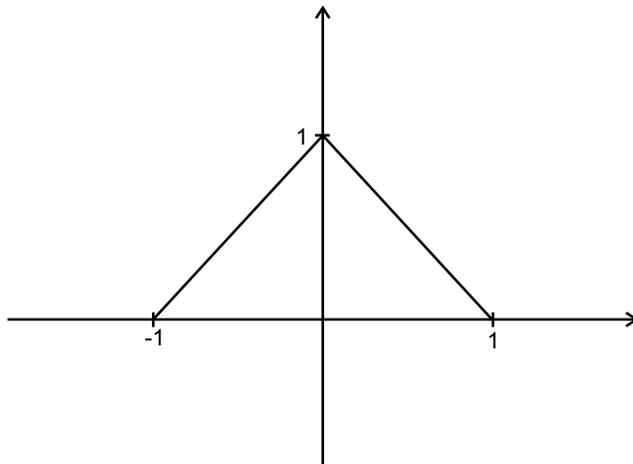
$$\int_{\Omega} u(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx$$

für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ erfüllt ist.

Beispiel 4.1

Es sei

$$u(x) = 1 - |x|, \quad |x| \leq 1$$



Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u(x)\varphi'(x) dx &= \int_{-1}^0 (1+x)\varphi'(x) dx + \int_0^1 (1-x)\varphi'(x) dx \\ &= (1+x)\varphi(x)|_{-1}^0 + (1-x)\varphi(x)|_0^1 - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx + \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= -\int_{-1}^0 \varphi(x) dx + \int_0^1 \varphi(x) dx \stackrel{!}{=} -\int_{-1}^1 w(x)\varphi(x) dx \end{aligned}$$

mit

$$w(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & , \quad -1 \leq x < 0 \\ -1 & , \quad 0 < x \leq 1 \end{array} \right\} = u'(x)$$

$$w \in L^\infty(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$$

- $\mathcal{A}u'' \in L^1_{loc}$.

Bemerkung 4.1 Für $u \in C^k(\bar{\Omega})$ stimmen klassische und verallgemeinerte Ableitungen bis zur Ordnung k überein.

Bemerkung 4.2 Die verallgemeinerte Ableitung ist bis auf einer Lebesgue-Nullmenge eindeutig festgelegt.

Bemerkung 4.3 *Definition anderer Differentialoperatoren (in schwachem Sinn):*

z.B. *div, rot, grad*

$$w = \operatorname{div} u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega} (u, \operatorname{grad} \varphi) dx = - \int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx$$

$$u \in (L^1_{\text{loc}}(\Omega))^d \dots \text{Vektorfeld}$$

Definition 4.4 (*Distribution*)

Jedes lineare, stetige Funktional über $C_0^\infty(\Omega)$ heißt *Distribution*. Die Menge aller Distributionen wird mit $(C_0^\infty(\Omega))' = \mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet.

D.h. $\psi : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, linear, stetig.

Notation:

$$\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \psi \in (C_0^\infty(\Omega))' : \quad \psi(\varphi) \equiv \langle \psi, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$$

Beispiel 4.2 Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

$$\langle \psi, \varphi \rangle := \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

definiert eine *Distribution* ψ ; sie wird mit $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ identifiziert. *Distributionen* mit dieser Darstellung heißen *regulär*, andernfalls *singulär*.

Beispiel 4.3 Sei $\xi \in \Omega$ fixiert. $\langle \delta_\xi, \varphi \rangle := \varphi(\xi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ definiert offenbar eine (*singuläre*) *Distribution*, die sogenannte *Dirac'sche Deltafunktion*.

Notation: $\delta_\xi(x) = \delta(x - \xi)$

Definition 4.5 Sei $u \in (C_0^\infty(\Omega))'$ eine *Distribution* und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Die *Distribution* $w \in (C_0^\infty(\Omega))'$ heißt *distributive Ableitung der Ordnung $|\alpha|$ von u* , wenn

$$\langle w, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Bemerkung 4.4 *Eine Distribution besitzt distributive Ableitungen beliebiger Ordnung.*

Bemerkung 4.5 *Ist die distributive Ableitung $\partial^\alpha u$ von $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ regulär, dann existiert die verallgemeinerte Ableitung und beide werden identifiziert:*

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\int \partial^\alpha u(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

4.2 Die Sobolev-Räume $W^{k,p}(\Omega)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand Γ .
 Folgende Räume sind für uns von Bedeutung:

- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ messbar}, \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$
- $$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{0,p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ messbar}, \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}$
- $$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u\|_{0,\infty,\Omega} = \text{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

$L^2(\Omega)$ ist ein *Hilbert-Raum* mit

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{0,2,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Die *dualen Räume* sind:

$$(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega) \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$(L^\infty(\Omega))' \neq L^1(\Omega), \text{ der Raum } L^1(\Omega) \text{ ist nicht reflexiv.}$$

Definition 4.6 (*Sobolev-Raum $W^{k,p}(\Omega)$*)

Sei $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$.
 Der *Sobolev-Raum* $W^{k,p}(\Omega)$ ist

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \exists \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| = 0, 1, \dots, k\}$$

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|u\|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{k,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Bemerkung 4.6 $\partial^\alpha u \equiv u$ wenn $\alpha = (0, \dots, 0)$

Bemerkung 4.7 $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$

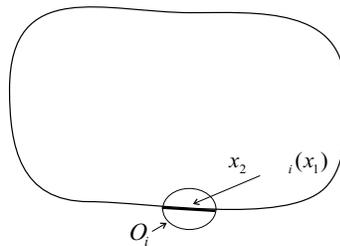
Eigenschaften:

Die Sobolev-Räume sind

- 1) Banach-Räume
- 2) separabel
- 3) uniform konvex für $1 < p < \infty$
- 4) reflexiv für $1 < p < \infty$

Die Sobolev-Räume $H^k(\Omega) := W^{2,k}(\Omega)$ sind *Hilbert-Räume* mit

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = (u, v)_{k,2,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx$$

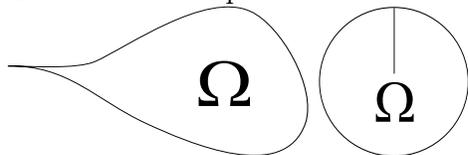
Definition 4.7 (*Lipschitz-Rand*)

Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) hat einen *Lipschitzrand*, falls alle $x \in \partial\Omega$ in einer offenen Menge O_i , $i = 1, \dots, M$ liegen, mit $O_i \cap \Omega = O_i \cap \Omega_i$ und

$$\Omega_i \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d : x_1 \in \mathbb{R}^{d-1}, x_2 \in \mathbb{R}, x_2 < \phi_i(x_1)\}$$

mit Lipschitzstetigem ϕ_i , also $|\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leq L|x - y|$, $L > 0$.

Gebiete *ohne* Lipschitzrand:

Zweite Definitionsmöglichkeit von Sobolev-Räumen:

Definiere $\tilde{W}^{k,p}(\Omega) := \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{k,p,\Omega}}$ in $W^{k,p}(\Omega)$

Es gilt $\tilde{W}^{k,p}(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega)$. Wenn Ω beschränkt und $\Gamma = \partial\Omega$ eine $C^{0,1}$ -Oberfläche (=Lipschitz-Rand) ist, dann gilt

$$\tilde{W}^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega).$$

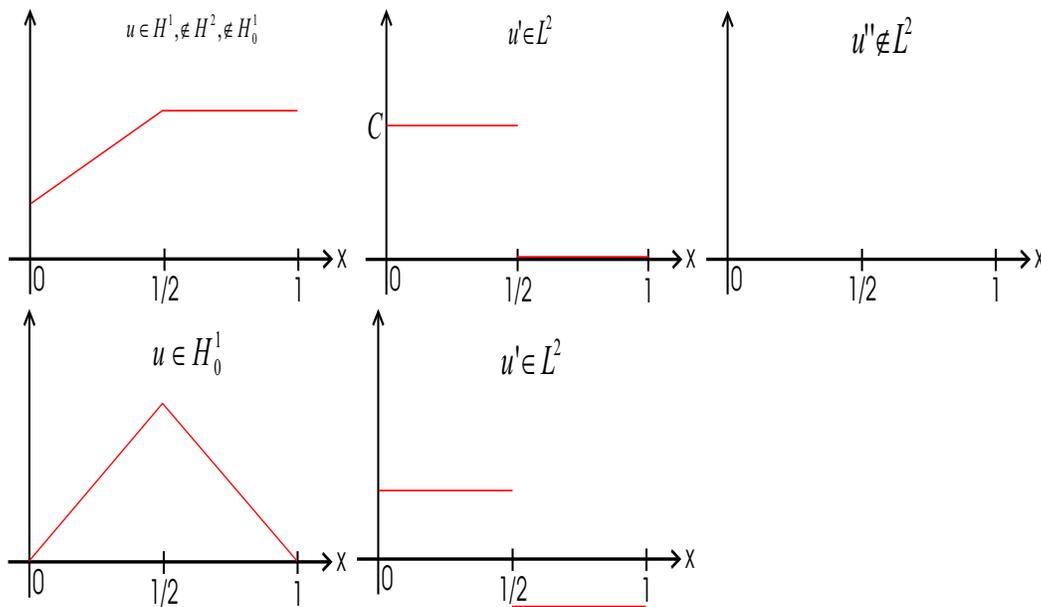
In diesem Fall liegen $C^\infty(\bar{\Omega})$ und $C^l(\bar{\Omega})$, $l \geq k$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.

Definition 4.8 (Sobolev-Raum $W_0^{k,p}$)

Der Sobolev-Raum $W_0^{k,p} := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}$ ist der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. der Norm im $W^{k,p}(\Omega)$. Die Glattheit des Randes wird dabei nicht vorausgesetzt.

- Ab nun sei Γ eine $C^{0,1}$ -Oberfläche (Lipschitz-Rand)

Beispiel 4.4 $\Omega = (0, 1)$



4.3 Verallgemeinerte Randfunktion

Motivation

- Definition von $u|_\Gamma$ für Randwertaufgaben:
 Sei $u \in C^{k,\sigma}(\bar{\Omega}) \Rightarrow u|_\Gamma \in C^{k,\sigma}(\Gamma)$ (für Γ "glatt"); aber $u \in H^k(\Omega) \not\Rightarrow u|_\Gamma \in H^k(\Gamma)$, da Γ Nullmenge ist!

- Umkehrung:

Sei $\mu(x)$ definiert auf Γ

Frage: \exists „Fortsetzung“ (nicht eind.) $u(x) \in H^1(\Omega)$ mit $u|_{\Gamma} = \mu$?

Falls nein \Rightarrow keine Lösung des entsprechenden Dirichletproblems in $H^1(\Omega)$!

Lemma 4.1 (*Spurabbildung*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ mit $C^{0,1}$ -Rand (Lipschitz-Rand) Γ ; sei $1 \leq p < \infty$.

Es gibt genau einen linearen, stetigen Operator („Spurabbildung“, „Trace-Operator“)

$$\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Gamma) \text{ mit}$$

$$\gamma u(x) = u(x), \quad x \in \Gamma \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}),$$

$$\text{d.h. } \gamma u(x) = u(x)|_{x \in \Gamma}$$

Weiterhin gilt:

$$\exists C > 0 : \|\gamma u\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \quad (4.1)$$

bzw:

$$\|\gamma\|_{\mathcal{L}[W^{1,p}(\Omega), L^p(\Gamma)]} \leq C$$

- Die *Abbildungsnorm* ist dabei wie folgt definiert:

Sei $T : X \rightarrow Y$ lineare Abbildung; X, Y ...normierte Räume

$$\|T\|_{\mathcal{L}[X,Y]} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

Bew: [Ha1] § 6.2.5

Bemerkung 4.8 (*Spurabbildung in $W_0^{1,p}(\Omega)$*)

In $W_0^{k,p}(\Omega)$ gilt:

$$1) \quad \gamma u(x) = 0 \quad \forall u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$2) \quad \gamma \partial^\alpha u(x) = 0 \quad \forall u(x) \in W_0^{k,p}(\Omega) \quad |\alpha| \leq k - 1$$

4.4 Satz über äquivalente Normierungen

Definition 4.9 (*Äquivalenz von Normen*)

Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen auf dem linearen Raum U *äquivalent*, wenn

$$\exists C_1, C_2 > 0 \text{ mit } C_1\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq C_2\|u\|_1 \quad \forall u \in U$$

Bemerkung 4.9 *Viele wichtige Eigenschaften (wie z.B. Stetigkeit, Konvergenz) ändern sich beim Übergang zu äquivalenten Normen nicht.*

Satz 4.1 (*Normierungssatz, Bramble-Hilbert-Lemma*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit $C^{0,1}$ –(Lipschitz-)Rand Γ , $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$.

Sei $\{f_j, j = 1, \dots, l\}$ ein *System von stetigen Halbnormen*, d.h.

- 1) $f_j : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$ ist eine Halbnorm
- 2) $\exists c_j > 0$ mit $0 \leq f_j(v) \leq c_j \|v\|_{k,p,\Omega} \quad \forall v \in W^{k,p}(\Omega)$
- 3) sei $v \in P_{k-1} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k-1} c_\alpha x^\alpha \right\}$ beliebig, und $f_j(v) = 0; \quad \forall j = 1, \dots, l \Rightarrow v \equiv 0$.

Dann gilt die *Äquivalenz der Normen* $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ und

$$\|u\|_{k,p,\Omega}^* = \left(\sum_{j \leq l} f_j^p(u) + |u|_{k,p,\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

mit der Sobolev-Halbnorm

$$|u|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Beispiel 4.5 *Im $W^{1,p}(\Omega)$ sind die folgenden Normen zu $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$ äquivalent (für Ω beschränkt):*

- 1) $\|u\|_{1,p,\Omega}^* = \left(\left| \int_{\Omega} u dx \right|^p + |u|_{1,p,\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}}$
- 2) $\|u\|_{1,p,\Omega}^* = \left(\left| \int_{\Gamma} u(x) dS_x \right|^p + |u|_{1,p,\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}}$
- 3) $\|u\|_{1,p,\Omega}^* = \left(\int_{\Gamma} |u|^p dS_x + |u|_{1,p,\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}}$

Und im $W^{k,p}(\Omega)$ ist folgende Norm zu $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ äquivalent:

$$\|u\|_{k,p,\Omega}^* = \left(\sum_{j=0}^{k-1} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^j u}{\partial n^j} \right|^p dS_x + |u|_{k,p,\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$n = (n_1, \dots, n_d)^T$... Außennormale an Γ , $|n| = 1$

Bemerkung 4.10

In $W_0^{k,p}(\Omega)$ wird die Voraussetzung „ Γ ist eine $C^{0,1}$ -Oberfläche“ von Satz 4.1 nicht benötigt:

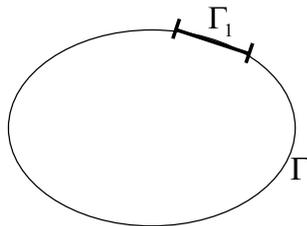
$$\|u\|_{k,p,\Omega}^* = |u|_{k,p,\Omega}$$

d.h. im Teilraum $W_0^{k,p}$ von $W^{k,p}$ ist die Standardhalbnorm eine äquivalente Norm zu $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$.

4.5 Einige Ungleichungen in Sobolev-Räumen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit $\Gamma = \partial\Omega$ und

$$\Gamma_1 \subseteq \Gamma, \text{ meas}_{\mathbb{R}^{d-1}} \Gamma_1 = \int_{\Gamma_1} dS_x > 0.$$



Wir betrachten den Raum V_0

$$V_0 = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\} \subset W^{1,p}(\Omega), \text{ falls } \Gamma_1 \subset \Gamma$$

$$V_0 = W_0^{1,p}(\Omega), \text{ falls } \Gamma_1 = \Gamma; \quad 1 \leq p < \infty$$

Lemma 4.2

Sei $1 \leq p < \infty$, $\infty \geq \text{meas}_{\mathbb{R}^{d-1}} \Gamma_1 > 0$. Es gilt für alle $u \in V_0$

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq C_p \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx$$

Für $\Gamma_1 = \Gamma$ nennt man diese Ungleichung auch *Friedrichs-Ungleichung* (für $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$).

Beweis (für $\text{meas } \Gamma_1 < \infty$):

Wir zeigen die Ungleichung mit Hilfe des *Normierungssatzes 4.1*:

Sei $f_1(u) = \left(\int_{\Gamma_1} |u(x)|^p dS_x \right)^{\frac{1}{p}} \cdot f_1(u)$ erfüllt:

1) $f_1(u) : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist eine Halbnorm

$$2) \quad 0 \leq f_1(u) \leq \left(\int_{\Gamma} |u(x)|^p dS_x \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\gamma u\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

$$3) \quad \text{sei } v \in P_0 \text{ (also } v(x) = \text{konst} = v) \text{ und } 0 = f_1(v) = \left(\int_{\Gamma_1} |v(x)|^p dS_x \right)^{\frac{1}{p}} = |v| \underbrace{\left(\text{meas}_{\mathbb{R}^{d-1}} \Gamma_1 \right)^{\frac{1}{p}}}_{>0}$$

$$\Rightarrow v \equiv 0$$

Die Voraussetzungen des *Satzes 4.1 (Normierungssatz)* sind damit erfüllt. Es folgt:

$$\|u\|_{1,p}^* = \left(\int_{\Gamma_1} |u(x)|^p dS_x + \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

und $\|u\|_{1,p}$ sind äquivalent.

Insbesondere gilt:

$$\int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \leq c_p \left(\int_{\Gamma_1} |u|^p dS_x + \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} |u|^p dx \leq c_p \left(\int_{\Gamma_1} |u|^p dS_x + \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right).$$

Für Funktionen $u \in V_0$ erhalten wir sofort die Behauptung:

$$\int_{\Omega} |u|^p dx \leq c_p \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx.$$

□

Bemerkung 4.11 Auf V_0 ist $|\cdot|_{1,p,\Omega}$ eine zu $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$ äquivalente Norm:

$$\underline{c}|u|_{1,p,\Omega} \leq \|u\|_{1,p,\Omega} \leq \bar{c}|u|_{1,p,\Omega} \quad \forall u \in V_0$$

Bsp: $1D, \Omega = (0, 1), \Gamma_1 = \{0\}$

Lemma 4.3 (Poincaré-Ungleichung)

Sei $\Omega' \subseteq \Omega, \infty > \text{meas}_{\mathbb{R}^d} \Omega' = \int_{\Omega'} dx > 0$.

$$\Rightarrow \int_{\Omega} |u|^p dx \leq c_p \left[\left| \int_{\Omega'} u(x) dx \right|^p + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \right] \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Beweis:

Wir benutzen wieder die Resultate des Normierungssatzes 4.1 mit $f_1(u) = \left| \int_{\Omega'} u(x) dx \right|$:

- 1) $f_1 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist eine Halbnorm
- 2) $0 \leq f_1(u) = \left| \int_{\Omega'} 1 \cdot u(x) dx \right| \stackrel{\text{Hölder-Ungl.}}{\leq} (\text{meas}(\Omega'))^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega'} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$
 $\leq (\text{meas}(\Omega'))^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq (\text{meas}(\Omega'))^{\frac{1}{q}} \|u\|_{1,p,\Omega}$
- 3) Sei $v \in P_0$, d.h. $v = \text{const.}$ und $0 = f_1(v) = |v| \cdot \underbrace{\text{meas}(\Omega')}_{>0}$
 $\Rightarrow v(x) \equiv 0$

Die Behauptung folgt aus dem Normierungssatz.

□

4.6 Die Formel der partiellen Integration

Für $u \in C^1(\bar{\Omega})$ gilt die Beziehung

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) dx = \int_{\Gamma} u(x) n_j(x) dS_x, \tag{4.2}$$

wobei $n(x) = (n_1(x), \dots, n_d(x))^T \in \mathbb{R}^d$ die Außennormale (normiert) bezeichnet.

Mit $u(x) = v(x)w(x)$ ergibt sich die *klassische Formel der partiellen Integration*:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v(x) \right) w(x) dx = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} w(x) \right) v(x) dx + \int_{\Gamma} v(x) w(x) n_j(x) dS_x$$

Lemma 4.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ ein Gebiet mit einem Lipschitz- ($C^{0,1}$ -) Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Dann gilt die Bilanzgleichung:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) dx = \int_{\Gamma} u(x) n_j(x) dS_x \quad \forall u \in W^{1,1}(\Omega)$$

Beweis (für Ω beschränkt):

$C^1(\bar{\Omega})$ liegt *dicht* in $W^{1,1}(\Omega)$, d.h.

$$\forall u \in W^{1,1}(\Omega) \exists \{u_m\} \subset C^1(\bar{\Omega}) \text{ mit } \|u_m - u\|_{1,1,\Omega} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

Aus der Eigenschaft der Randfunktion (4.1) erhalten wir:

$$\|u_m - u\|_{L^1(\Gamma)} \leq C \|u_m - u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (\text{für } m \rightarrow \infty)$$

und damit die Behauptung aus (4.2):

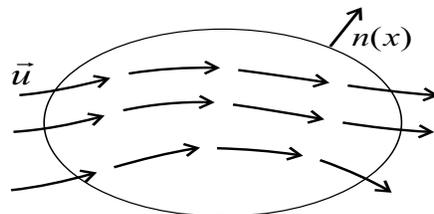
$$\left| \int_{\Gamma} [u_m(x) - u(x)] \underbrace{n_j(x)}_{|\cdot| \leq 1} dS_x \right| \leq \|u_m - u\|_{L^1(\Gamma)}$$

□

Folgerung 4.1

Sei $u \in (W^{1,1}(\Omega))^d$ ein Vektorfeld. Es gilt:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u(x) dx = \int_{\Gamma} (u(x), n(x)) dS_x \quad (\text{„Bilanzidentität“})$$



Folgerung 4.2 „partielle Integration“

$\forall v \in W^{1,p}(\Omega)$, $\forall w \in W^{1,q}(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v \right) w dx = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} w \right) v dx + \int_{\Gamma} v w n_j dS_x.$$

Beweis:

Setze in Lemma 4.4: $u(x) = v(x)w(x) \in W^{1,1}(\Omega)$ + Hölder-Ungleichung

Folgerung 4.3 „1. Greensche Formel“

$$\int_{\Omega} (\nabla v, \nabla w) \, dx = - \int_{\Omega} (\Delta v) w \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} w \, dS_x$$

$$\forall v \in H^2(\Omega) \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

Beweis:

Setze in Lemma 4.4: $u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v(x) \right) w(x) \in W^{1,1}(\Omega)$ + Summieren

Folgerung 4.4 „2. Greensche Formel“

$$\int_{\Omega} [(\Delta v)w - (\Delta w)v] \, dx = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial n} w - \frac{\partial w}{\partial n} v \right) \, dS_x \quad \forall v, w \in H^2(\Omega).$$

4.7 Einbettungssätze und Sobolev-Ungleichung

Definition 4.10 (*stetige Einbettung*)

Es seien U, V normierte Räume mit den zugehörigen Normen $\|\cdot\|_U, \|\cdot\|_V$.

Der Raum U heißt *stetig eingebettet* in V , falls $\forall u \in U$ gilt: $u \in V$ und eine Konstante $c > 0$ existiert mit

$$\|u\|_V \leq c \|u\|_U \quad \forall u \in U.$$

Falls U nicht Teilmenge von V ist, betrachtet man einen Isomorphismus von U auf einem Teilraum von V (und identifiziert diese beiden nachfolgend).

Schreibweise: $U \hookrightarrow V$

c heißt *Einbettungskonstante*.

Lemma 4.5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $1 \leq p < \infty$, $m \geq k$. Dann gilt

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega).$$

Lemma 4.6 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $k \geq 0$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Dann gilt:

$$W^{k,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$$

Lemma 4.7 (*natürliche Erweiterung*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit einem Lipschitz-Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Dann existiert eine Abbildung $E : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$, $k \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$ mit

- a) $Ev|_{\Omega} = v$
- b) $\|Ev\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C_E \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}$

Satz 4.2 (Sobolev-Ungleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit Lipschitz-Rand $\Gamma = \partial\Omega$, $k \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ mit

$$k \geq d \quad \text{für } p = 1$$

$$k > \frac{d}{p} \quad \text{für } p > 1.$$

\Rightarrow Es existiert eine Konstante C , sodass $\forall u \in W^{k,p}(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Und in der $L^\infty(\Omega)$ -Äquivalenzklasse von u ist sogar eine *stetige Funktion* enthalten, d.h.

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}).$$

Bsp:

$$d = 1 \quad : \quad H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}),$$

$$d = 2, 3 \quad : \quad H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}).$$

Bemerkung 4.12 Jede Funktion mit genügend vielen schwachen Ableitungen kann als stetige, beschränkte Funktion betrachtet werden.

Bemerkung 4.13 Die Bedingung $k > \frac{d}{p}$ (strikte Ungleichung!) ist scharf für $p > 1$:

Beispiel 4.6

Sei $d \geq 2$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < \frac{1}{2}\}$,
 $f(x) = \ln |\ln |x|| \notin L^\infty(\Omega)$, da unbeschränkt an $x = 0$.
 Es gilt für $|\alpha| = 1$:

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{1}{\ln |x|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \frac{x_\alpha}{|x|} = \frac{x_\alpha}{|x|^2 \ln |x|}.$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2} \Rightarrow \partial^\alpha |x| = \frac{x_\alpha}{|x|}$$

Für $p \leq d$ erhalten wir

$$|\partial^\alpha f(x)|^p = \underbrace{\left| \frac{x_\alpha}{|x|} \right|^p}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left| \frac{1}{|x| \ln |x|} \right|^p}_{\geq 1} \leq \left| \frac{1}{|x| \ln |x|} \right|^d$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)|^p dx &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^d |\ln |x||^d} dx = \int_{S^{d-1}} d\omega \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\rho^{d-1}}{\rho^d |\ln \rho|^d} d\rho \quad (\text{sphärische Koordinaten}) \\ &= F(S^{d-1}) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\rho |\ln \rho|^d} d\rho \\ &= F(S^{d-1}) \left(- \int_{\infty}^{\ln 2} \frac{dt}{t^d} \right) < \infty, \text{ weil } d \geq 2; \end{aligned}$$

mit $\rho = e^{-t}$ (d.h. $t = -\ln \rho$) $\Rightarrow |\ln \rho| = t > 0, d\rho = -\rho dt$.

Es gilt damit $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega), p \leq d, |\alpha| = 1$.

Analog beweisen wir $f \in L^p(\Omega), p \leq d$.

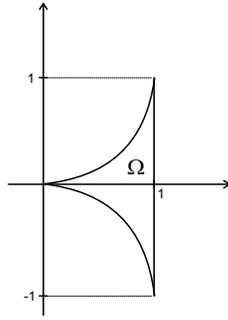
Damit gilt: $f \in W^{1,p}(\Omega), p \leq d$
 oder $k = 1 \leq \frac{d}{p}$. (Die Bedingung des Satzes 4.2 ist verletzt)

Bemerkung 4.14 Die Bedingung „ Γ ist Lipschitz-Rand“ im Satz 4.2 ist wichtig:

Beispiel 4.7

Sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, |y| < x^r\}$ für ein $r > 1 \Rightarrow \Gamma$ ist nicht Lipschitz!
 Für $u(x, y) := x^{-\frac{\varepsilon}{p}}, 0 < \varepsilon < r, 1 < p < \infty$ gilt:

$$\begin{aligned} \partial^{(1,0)} u &= \underbrace{-\frac{\varepsilon}{p}}_{=: c(\varepsilon, p)} x^{-\frac{\varepsilon}{p}-1} \\ \partial^{(0,1)} u &= 0 \end{aligned}$$



und damit

$$\begin{aligned}
 \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} u|^p dx dy &= c^p \int_{\Omega} x^{-\varepsilon-p} dx dy \\
 &= c^p \int_0^1 x^{-\varepsilon-p} \int_{-x^r}^{x^r} dy dx \\
 &= 2c^p \int_0^1 x^{-\varepsilon-p+r} dx < \infty
 \end{aligned}$$

für $-\varepsilon - p + r > -1$, d.h. $p < 1 + r - \varepsilon$. Wähle nun $\varepsilon > 0$ so klein, dass noch ein $p > 2$ zulässig ist.

analog: $u \in L^p(\Omega)$

D.h. $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\frac{d}{p} < 1 = k$, aber an $x = 0$ unbeschränkt!

Ref: [GR] § 3-3.2, [Ha1] § 6

5 Variationsformulierung von Randwertproblemen

5.1 Bilinearformen, lineare Funktionale

Definition 5.1 (*Bilinearform*)

Sei V ein Vektorraum.

Die Abbildung $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Bilinearform*, wenn

$$\begin{aligned} a(u, \lambda v + \mu w) &= \lambda a(u, v) + \mu a(u, w) \\ a(\lambda u + \mu v, w) &= \lambda a(u, w) + \mu a(v, w) \end{aligned} \quad \forall u, v, w \in V; \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 5.1 *Das Skalarprodukt ist eine Bilinearform mit den zusätzlichen Eigenschaften:*

- a) $(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V$
- b) $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Beispiel 5.1

- a) $V = \mathbb{R}^d, (u, v) = \sum_{j=1}^d u_j v_j$
- b) $V = L^2(\Omega), (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$
- c) $V = H^k(\Omega), (u, v)_{2,k,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$

Definition 5.2

Eine Bilinearform $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem normierten Vektorraum V heißt

- 1) *stetig (bzw. beschränkt)*, falls es eine Konstante C_1 gibt, so dass

$$|a(v, w)| \leq C_1 \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V; \quad C_1 : \text{Stetigkeitskonstante}$$

- 2) *koerziv* auf dem Unterraum $H \subseteq V$, wenn sie stetig ist und eine Konstante $C_2 > 0$ existiert, so dass

$$a(v, v) \geq C_2 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in H \subseteq V; \quad C_2 : \text{Koerzivitatskonstante}$$

Lemma 5.1 *Sei V ein Hilbert-Raum und $a(\cdot, \cdot)$ eine symmetrische ($a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$) Bilinearform, die auf dem abgeschlossenen Unterraum $H \subseteq V$ koerziv ist. Dann ist $(H, a(\cdot, \cdot))$ ein Hilbert-Raum.*

Beweis:

Auf H gilt: $a(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ und $a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H$, d.h. $a(\cdot, \cdot)$ definiert ein Skalarprodukt auf H .

Sei $\|v\|_E := (a(v, v))^{\frac{1}{2}}$ die entsprechende Norm („Energie-Norm“) und $\{v_n\}$ eine Cauchy-Folge in $(H, a(\cdot, \cdot))$.

Die Koerzivität garantiert, dass $\{v_n\}$ eine Cauchy-Folge in $(V, \|\cdot\|_V)$ ist: $\|v\|_E \geq \sqrt{C_2} \|v\|_V$. Da V vollständig ist, existiert $v \in V$ mit $v_n \rightarrow v$ in $\|\cdot\|_V$. Da $H \subset V$ abgeschlossen ist, gilt $v \in H$.

Mit der Stetigkeit von a gilt dann:

$$\|v - v_n\|_E = (a(v - v_n, v - v_n))^{\frac{1}{2}} \leq (C_1 \|v - v_n\|_V \cdot \|v - v_n\|_V)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0.$$

Also ist $(H, \|\cdot\|_E)$ vollständig.

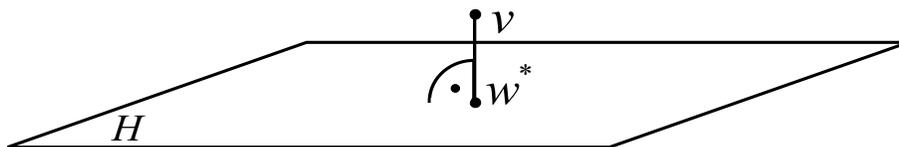
$\Rightarrow (H, a(\cdot, \cdot))$ ist ein Hilbert-Raum.

□

Satz 5.1 (*Projektionssatz*)

Sei $H \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbert-Raumes V . Sei $v \in V \setminus H$ und $\delta := \inf_{w \in H} \|v - w\|_V$.

Dann gilt:



- 1) $\delta > 0$
- 2) $\exists! w^* \in H$ mit $\|v - w^*\|_V = \delta$
- 3) $v - w^* \in H^\perp$

Beweis:

- 1) Der Unterraum H ist bzgl. $\|\cdot\|_V$ abgeschlossen und $v \notin H \Rightarrow \delta > 0$
- 2) Sei $\{w_n\} \subset H$ eine *minimierende Folge*, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - w_n\| = \delta$.
Wir werden zeigen, dass $\{w_n\}$ eine Cauchy-Folge ist:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|w_m - w_n\|_V^2 &= \|(w_m - v) - (w_n - v)\|_V^2 \\ &= 2(\|w_m - v\|_V^2 + \|w_n - v\|_V^2) - \|(w_m - v) + (w_n - v)\|_V^2 \\ &= 2(\|w_m - v\|_V^2 + \|w_n - v\|_V^2) - 4\left\|\frac{w_m + w_n}{2} - v\right\|_V^2 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\frac{1}{2}(w_m + w_n) \in H \Rightarrow \left\|\frac{1}{2}(w_m + w_n) - v\right\|_V \geq \delta$$

und damit

$$0 \leq \|w_m - w_n\|_V^2 \leq 2(\|w_m - v\|_V^2 + \|w_n - v\|_V^2) - 4\delta^2$$

Für $n \rightarrow \infty$, $m \geq n$ erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_m - w_n\|_V^2 \leq 2(\delta^2 + \delta^2) - 4\delta^2 = 0,$$

d.h. $\|w_m - w_n\|_V \rightarrow 0 \Rightarrow \{w_n\}$ ist eine Cauchyfolge.

Damit $\exists w^* = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ in $\|\cdot\|_V$, $w^* \in H$.

Die Stetigkeit der Norm ergibt $\|v - w^*\|_V = \delta$.

- 3) Sei $w \in H$ und $t \in \mathbb{R}$. Betrachte die Funktion $g(t) = \|v - w^* + tw\|^2$.
Es gilt: $g(t)$ hat in $t = 0$ ein Minimum, d.h.

$$g'(t)|_{t=0} = 2(v - w^*, w) + 2t\|w\|^2|_{t=0} = 2(v - w^*, w) = 0 \quad \forall w \in H.$$

Damit erhalten wir $v - w^* \in H^\perp$.

□

Bemerkung 5.2 $\forall v \in V$ gilt $v = w^* + w^\perp$ mit $w^* \in H$, $w^\perp \in H^\perp$ und $\|v - w^*\| = \inf_{w \in H} \|v - w\|$.

Diese Darstellung ist eindeutig.

Definition 5.3 (Projektor)

Der Operator $P : V \rightarrow H$ mit $Pv = w^*$ heißt *Orthogonal-Projektor*. Es gilt $P^2 = P$.

Bemerkung 5.3 Der Projektor P ist ein linearer Operator:

$P \in \mathcal{L}(V, H)$; $\|P\| = 1$ für $H \neq \{0\}$

Sei V ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $u^* \in V$ ein festes Element. Die Abbildung $\varphi_{u^*} : V \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto \varphi_{u^*}(v) := (u^*, v)$ ist ein lineares, stetiges Funktional.

Es gilt aber auch:

Satz 5.2 (Darstellungssatz von Riesz)

Jedes stetige lineare Funktional $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ hat die folgende *Darstellung*:

Es existiert genau ein $u^*(= u^*(\varphi)) \in V$, so dass

$$\varphi(v) = (u^*, v), \quad \forall v \in V \text{ und } \|\varphi\|_{V'} = \|u^*\|_V$$

Beweis:

Sei $H \subset V$ ein Unterraum mit $H = \{v \in V : \varphi(v) = 0\}$.

Damit kann V in eine *direkte Summe*

$$V = H \oplus H^\perp, \quad H^\perp = \{z \in V : (z, v) = 0, \forall v \in H\}$$

zerlegt werden.

Es gibt zwei Möglichkeiten:

1) $H^\perp = \{0\} \Rightarrow \varphi(v) = 0 \Rightarrow H = V \Rightarrow \varphi(v) = 0 \forall v \in H$, d.h. es besteht die Möglichkeit, $u^* = 0$ zu wählen.

2) $H^\perp \neq \{0\}$.

Wähle ein Element $z \in H^\perp$, $z \neq 0$. Es gilt $\varphi(z) \neq 0$. Weiterhin gilt für alle $v \in H^\perp$ mit $\alpha = \frac{\varphi(v)}{\varphi(z)}$:

$v - \alpha z \in H^\perp$, weil $v, z \in H^\perp$, aber auch

$v - \alpha z \in H$, weil $\varphi(v - \alpha z) = \varphi(v) - \alpha\varphi(z) = 0$,

und damit $v - \alpha z = 0$, $\dim H^\perp = 1$

$\forall v \in V$ gilt jetzt eindeutig $v = v_1 + \alpha z$, $v_1 \in H$
 und damit $\varphi(v) = \underbrace{\varphi(v_1)}_{=0} + \alpha\varphi(z) \Rightarrow \alpha = \frac{\varphi(v)}{\varphi(z)}$

Das gesuchte Element $u^* \in V$ hat die Form

$$u^* = \frac{\varphi(z)}{\|z\|_V^2} \cdot z :$$

$$\begin{aligned} (u^*, v) &= (u^*, v_1 + \alpha z) = \frac{\varphi(z)}{\|z\|_V^2} (z, v_1 + \frac{\varphi(v)}{\varphi(z)} \cdot z) \\ &= \frac{\varphi(z)}{\|z\|_V^2} \left[\underbrace{(z, v_1)}_{=0} + \frac{\varphi(v)}{\varphi(z)} \cdot \|z\|_V^2 \right] = \varphi(v) \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Übung

- Für die Norm von $u^* \in V$ gilt offenbar:

$$\|u^*\|_V^2 = (u^*, u^*) = \frac{\varphi^2(z)}{\|z\|_V^4} (z, z) = \frac{\varphi^2(z)}{\|z\|_V^2},$$

$$\text{d.h. } \|u^*\|_V = \frac{|\varphi(z)|}{\|z\|_V}.$$

Die Definition der Norm in V' liefert:

$$\|\varphi\|_{V'} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|\varphi(v)|}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|(u^*, v)|}{\|v\|_V} \stackrel{\text{Schwarz-Ungl.}}{\leq} \|u^*\|_V$$

Andererseits

$$\|u^*\|_V = \frac{|\varphi(z)|}{\|z\|_V} \leq \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|\varphi(v)|}{\|v\|_V} = \|\varphi\|_{V'}$$

Damit gilt: $\|\varphi\|_{V'} = \|u^*\|_V$.

□

Bemerkung 5.4 *Es existiert damit der sog. Riesz-Isomorphismus $V \leftrightarrow V'$, der die Norm erhält.*

Die dadurch identifizierten Räume, zB $H_0^1(\Omega)$ und $H^{-1}(\Omega)$ sind aber sehr unterschiedlich.

5.2 Variationsformulierungen

Beispiel 5.2 (*Dirichlet-Problem für die Poisson Gleichung*)

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \quad | \cdot v \in C_0^1(\bar{\Omega}); \int_{\Omega} \dots dx \quad (5.1)$$

- *klassische Lösung*, falls $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (hinreichende Bed: $f \in C(\bar{\Omega})$)

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx}_{=: a(u,v)} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS}_{=0} = \underbrace{\int_{\Omega} f v \, dx}_{=: \varphi(v)}$$

- *schwache Formulierung*:
ges: $u \in H_0^1(\Omega)$ mit:

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H = V = H_0^1(\Omega)$$

Hinreichende Bed.: $f \in L^2(\Omega)$

Notwendige Bed.: $f \in H^{-1}(\Omega) = H'$

u heisst dann *schwache Lösung* von (5.1).

Laut Bemerkung 4.11: Auf $H_0^1(\Omega)$ ist $\sqrt{a(u, u)} = \|u\|_{1,2,\Omega}$ äquivalente Norm zu $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

$\Rightarrow a(\cdot, \cdot)$ ist auf $H_0^1(\Omega)$ stetig, symmetrisch und koerziv.

$$|\varphi(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$\Rightarrow \varphi$ ist stetiges lineares Funktional, also $\varphi \in H'$.

Die *allgemeine Formulierung einer Variationsgleichung* ist wie folgt:

- Sei V ein Hilbert-Raum,
- $H \subseteq V$ ein abgeschlossener Unterraum,
- $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische, auf H koerzive Bilinearform.

Die Aufgabe:

Sei $\varphi \in H'$ gegeben. Gesucht ist ein Element $u \in H$ mit

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H \quad (5.2)$$

Satz 5.3 (*Existenz/Eindeutigkeit der Lösung der Variationsgleichung*)

Die Bedingungen a), b), c) seien erfüllt.

Dann existiert eine eindeutige Lösung der Aufgabe (5.2).

Beweis:

Die Bedingungen a), b), c) garantieren, dass $a(\cdot, \cdot)$ auf H ein Skalarprodukt darstellt.

Damit existiert eine eindeutige Lösung u^* des Problems laut (*Riesz-Satz*):

$$a(u^*, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H$$

□

• Das *Galerkin-Verfahren* zur näherungsweise Lösung des Problems (5.2) lautet:

1) Der *Ansatzraum* $H_h \subset H$ („konformes Verfahren“) sei ein endlichdimensionaler Unterraum von H , $\dim H_h = n < \infty$.

2) Gesucht ist ein Element $u_h \in H_h$ mit

$$a(u_h, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H_h \quad (5.3)$$

Satz 5.4 *Die Aufgabe (5.3) (Galerkin-Verfahren) hat eine eindeutige Lösung.*

Beweis:

H_h mit $a(\cdot, \cdot)$ ist offenbar ein Hilbert-Raum.

Die Einschränkung der rechten Seite auf H_h liefert $\varphi|_{H_h} \in (H_h)'$.

Damit existiert eine eindeutige Lösung $u_h \in H_h$ (laut Riesz-Satz).

□

Folgerung 5.1 (*Fundamentale Orthogonalität*)

$$a(u^* - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in H_h,$$

wobei u^* die Lösung von (5.2) und u_h die Lösung von (5.3) bezeichnen. D.h. der Fehler des Galerkin-Verfahrens ist orthogonal zu H_h bez. des Skalarproduktes $a(\cdot, \cdot)$ (vgl. Lemma 5.1).

Folgerung 5.2 Es gilt: $\|u^* - u_h\|_E = \min_{v \in H_h} \|u^* - v\|_E$, wobei die Energie-Norm in H als $\|\cdot\|_E := (a(\cdot, \cdot))^{\frac{1}{2}}$ definiert ist. D.h. u_h ist Bestapproximierende bez. $\|\cdot\|_E$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \|u^* - u_h\|_E^2 &= a(u^* - u_h, u^* - u_h) \\ &= a(u^* - u_h, u^* - v) + a(u^* - u_h, \underbrace{v - u_h}_{\in H_h}) \\ &= a(u^* - u_h, u^* - v) \\ &\leq \|u^* - u_h\|_E \cdot \|u^* - v\|_E \text{ (Cauchy-Schwartz)}. \end{aligned}$$

Für $\|u^* - u_h\|_E \neq 0 \Rightarrow \|u^* - u_h\|_E \leq \|u^* - v\|_E \quad \forall v \in H_h$, und damit $\|u^* - u_h\|_E = \inf_{v \in H_h} \|u^* - v\|_E$.

□

Satz 5.5 Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ sei koerziv und symmetrisch. Dann gilt: $u \in H$ löst die Variationsgleichung (5.2) $\Leftrightarrow u$ minimiert das folgende, quadratisch-nichtlineare Funktional:

$$J : H \rightarrow \mathbb{R}; \quad J(v) = a(v, v) - 2\varphi(v) \tag{5.4}$$

Bew:

⇒ $\forall v \in H$ gilt:

$$\begin{aligned} J(v) &\stackrel{a \text{ symm.}}{=} a(u, u) - 2\varphi(u) + \underbrace{2a(u, v - u) - 2\varphi(v - u)}_{=0 \text{ wegen (5.2)}} + \underbrace{a(v - u, v - u)}_{\geq 0} \\ &\geq J(u) \end{aligned}$$

⇐ Sei $u \in H$ Minimum von J über H , und $v \in H$ beliebig.

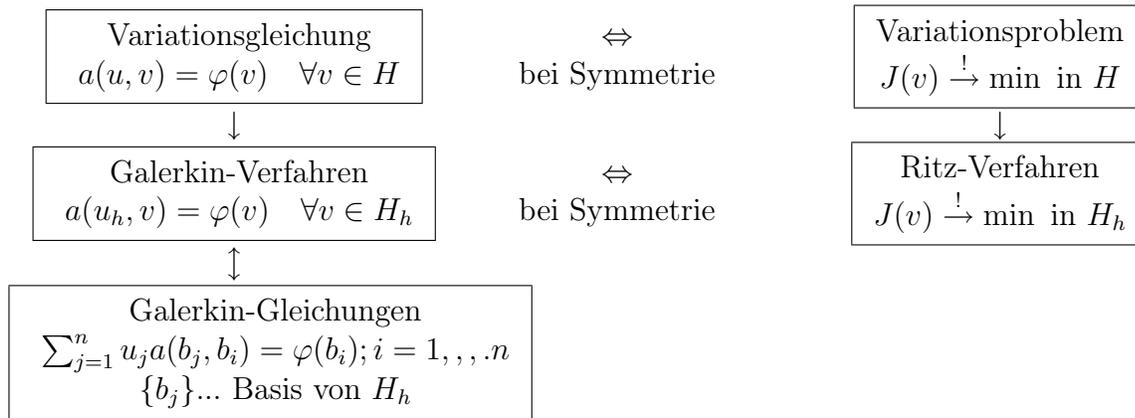
Betrachte für $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} j(t) &:= J(u + tv) \stackrel{a \text{ symm.}}{=} a(u, u) + 2ta(u, v) + t^2a(v, v) - 2\varphi(u) - 2t\varphi(v) \\ &\Rightarrow j'(0) \stackrel{!}{=} 0, \text{ also } 2a(u, v) - 2\varphi(v) = 0 \end{aligned}$$

□

Das Minimierungsproblem $J(v_h) \xrightarrow{!} \min$ in H_h heisst „Ritz-Verfahren“ für das Variationsproblem (5.4).

Für $a(\cdot, \cdot)$ symmetrisch ist es zum Galerkin-Verfahren äquivalent.



Wenn die *Bilinearform nichtsymmetrisch* ist, wird die Situation schwieriger:

Beispiel 5.3 $-u'' + u' + u = f, \quad x \in (0, 1), \quad u'(0) = u'(1) = 0$
 Sei $V = H^1(0, 1), \quad u, v \in V$.

$$\begin{aligned}
 a(u, v) &= \int_0^1 (-u'' + u' + u)v \, dx \\
 &= -u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v' \, dx + \int_0^1 (u' + u)v \, dx \\
 &= \int_0^1 (u'v' + u'v + uv) \, dx \\
 \varphi(v) &= \int_0^1 f v \, dx
 \end{aligned}$$

Diese Bilinearform ist *nichtsymmetrisch*, aber stetig und auf V koerziv:

Stetigkeit:

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &\leq \left| (u, v)_{H^1(0,1)} + \int_0^1 u'v \, dx \right| \\
 &\leq \|u\|_{H^1(0,1)} \|v\|_{H^1(0,1)} + \|u'\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} \\
 &\leq 2\|u\|_{H^1(0,1)} \|v\|_{H^1(0,1)}
 \end{aligned}$$

Koerzivität:

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_0^1 ((v')^2 + v'v + v^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (v' + v)^2 dx + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 ((v')^2 + v^2) dx}_{=\|v\|_{H^1(0,1)}^2} \\ &\geq \frac{1}{2} \|v\|_{H^1(0,1)}^2 \end{aligned}$$

Bemerkung 5.5 Die Gleichung $-u'' + \alpha u' + u = f$ führt für große $|\alpha|$ auf eine nicht-symmetrische und nichtkoerzive Bilinearform (siehe Übung).

Satz 5.6 (Lax-Milgram)

Sei V ein Hilbert-Raum, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und koerzive Bilinearform und $\varphi \in V'$ ein lineares Funktional über V . Dann existiert eine eindeutige Lösung u^* des Variationsproblems

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V.$$

Beweis:

Sei $u \in V$ ein festes Element und $\psi_u : V \rightarrow \mathbb{R}$ das Funktional

$$v \mapsto \psi_u(v) = a(u, v), \quad v \in V$$

Das Funktional ist linear ($a(u, v)$ ist linear bzgl. v), *stetig*:

$$|\psi_u(v)| = |a(u, v)| \leq c_1 \|u\|_V \cdot \|v\|_V = c_2 \|v\|_V$$

und seine *Norm*

$$\|\psi_u\|_{V'} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|\psi_u(v)|}{\|v\|_V} \leq c_1 \|u\|_V < \infty$$

ist endlich. Damit gilt $\psi_u \in V'$.

- Damit haben wir eine *lineare Abbildung* $u \mapsto \psi_u$ von V nach V' definiert ($a(u, v)$ ist linear bzgl. u !).

Die Abbildung ψ_u ist *stetig*:

$$\|\psi_u\|_{V \rightarrow V'} = \frac{\|\psi_u\|_{V'}}{\|u\|_V} \leq c_1$$

- Die Gleichung $a(u, v) = \varphi(v)$, $\forall v \in V$ kann man damit als $\psi_u(v) = \varphi(v)$, $\forall v \in V$ reformulieren.

Der *Darstellungssatz* besagt, dass ein u^* existiert mit $u^*(\psi_u) = u^*(\varphi)$. Alle Formulierungen sind offenbar äquivalent.

- Die letzte wird jetzt betrachtet:

Sei $T : V \rightarrow V$ die Abbildung

$$Tv = v - \rho(u^*(\psi_u) - u^*(\varphi)), \quad \forall v \in V, \quad \rho \neq 0$$

Wir werden zeigen, dass T *kontrahierend* ist, d.h.

$$\|Tv_1 - Tv_2\|_V \leq q\|v_1 - v_2\|_V, \quad 0 < q < 1$$

$$\begin{aligned} \|Tv_1 - Tv_2\|_V^2 &= \|v_1 - v_2 - \rho(u^*(\psi_{v_1}) - u^*(\psi_{v_2}))\|_V^2 \\ &= \|v - \rho u^*(\psi_v)\|_V^2 \quad (v = v_1 - v_2, u^*(\psi), \psi \text{ sind linear}) \\ &= \|v\|_V^2 - 2\rho(v, u^*(\psi_v)) + \rho^2 \|u^*(\psi_v)\|_V^2 \\ &= \|v\|_V^2 - 2\rho\psi_v(v) + \rho^2 |\psi_v(u^*(\psi_v))| \\ &= \|v\|_V^2 - 2\rho a(v, v) + \rho^2 |a(v, u^*(\psi_v))| \\ &\leq \|v\|_V^2 - 2\rho\alpha \|v\|_V^2 + \rho^2 c_1 \|v\|_V \|u^*(\psi_v)\|_V \\ &\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c_1^2) \|v\|_V^2 \\ &= (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c_1^2) \|v_1 - v_2\|_V^2 \end{aligned}$$

Für $\rho(\rho c_1^2 - 2\alpha) < 0$ ist $q = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c_1^2 < 1$
d.h. für $0 < \rho < \frac{2\alpha}{c_1^2}$ ist die Abbildung T kontrahierend,
d.h. es existiert ein eindeutiger *Fixpunkt* $Tu = u$:

$$\begin{aligned} u - \rho(u^*(\psi_u) - u^*(\varphi)) &= u \\ \Rightarrow u^*(\psi_u) &= u^*(\varphi) \quad \Rightarrow \psi_u = \varphi \\ \Rightarrow a(u, v) &= \varphi(v) \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

□

Folgerung:

Die *Galerkin-Gleichung*

$$\begin{cases} V_h \subset V & , \dim V_h < \infty \\ a(u_h, v) = \varphi(v) & , \forall v \in V_h \end{cases}$$

hat eine eindeutige Lösung. (Satz 5.6 für Hilbert-Raum V_h)

Eine wichtige Frage ist die *Genauigkeitsabschätzung für die approximative Lösung u_h* , d.h. die Abschätzung für $\|u - u_h\|_V$, wobei u die exakte Lösung bezeichnet.

Satz 5.7 (*Céa-Lemma*)

Die Voraussetzungen a), b) und c) seien erfüllt und $u \in V$ sei die Lösung von (5.2). Die Galerkin-Lösung u_h von (5.3) erfüllt

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{c_1}{c_2} \min_{v \in H_h} \|u - v\|_H, \quad (5.5)$$

wobei c_1 die *Stetigkeits-* und c_2 die *Koerzivitatskonstante* von $a(\cdot, \cdot)$ bezeichnen.

Beweis:

Es gilt $a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H$ und $a(u_h, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H_h$ und damit (Folgerung 5.1) die *fundamentale Orthogonalität*

$$a(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in H_h.$$

Die Bilinearform ist auf H *koerziv*:

$$\begin{aligned} c_2 \|u - u_h\|_H^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) + a(u - u_h, \underbrace{v - u_h}_{\in H_h}) \\ &= a(u - u_h, u - v) \\ &\leq c_1 \|u - u_h\|_H \cdot \|u - v\|_H \quad \forall v \in H_h \end{aligned}$$

und damit

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{c_1}{c_2} \|u - v\|_H \quad \forall v \in H_h$$

Da H_h abgeschlossen ist, erhalten wir

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{c_1}{c_2} \inf_{v \in H_h} \|u - v\|_H = \frac{c_1}{c_2} \min_{v \in H_h} \|u - v\|_H.$$

□

Bemerkung 5.6 Die Norm des Fehlers ist proportional zur bestmöglichen Approximation in H_h . Die Abschätzung nennt man deshalb quasi-optimal.

⇒ Ziel: Wahl von Funktionenräumen H_h (z.B. als FE-Raum), so dass u gut approximierbar ist.

Bemerkung 5.7 Sei $\{H_h\}$ eine asymptotische dichte UR-Folge von H ; d.h.: jedes $u \in H$ kann beliebig gut durch ein $u_h \in H_h$ approximiert werden.

Aus (5.5) folgt dann Konvergenz: $\|u - u_h\|_H \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

5.3 Beispiele elliptischer Variationsformulierungen

Beispiel 5.4 „Neumann-Problem“

Die Aufgabe:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + q(x)u(x) = f(x) & , x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2 \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x) & , x \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Die Variationsformulierung:

$$a(u, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in V = H^1(\Omega)$$

mit

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [(\nabla u, \nabla v) + q(x)uv] dx$$

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v dS_x$$

Greensche Formel:

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v dS_x$$

Die Eigenschaften von a für $q \in L^\infty(\Omega)$, $q(x) \geq q_0 > 0$:

1)

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max(1, \|q\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

\Rightarrow stetig.

2) $a(v, v) \geq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + q_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \min(1, q_0) \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$
 \Rightarrow koerziv.

3)

$$\begin{aligned} |\varphi(v)| &\leq c_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} + \left| \int_{\Gamma} g v dS_x \right| \\ &\leq c_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma v\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq c_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} + c_2 \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

d.h. $\varphi \in V'$ für $g \in L^2(\Gamma)$ und $f \in L^2(\Omega)$.
 \Rightarrow eindeutige Lösung.

Beispiel 5.5 (*gemischte RB*)

$$\begin{cases} -\Delta u = f & , \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad d \geq 2 \\ u = 0 & , \quad \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} + pu = q & , \quad \Gamma_2 \end{cases}$$

Anwendung: Wärmeleitung in Ω mit fester Randtemperatur auf Γ_1 und Fourier'scher Abkühlung auf Γ_2 : $\frac{\partial u}{\partial n} + p(u - u_0) = 0$ mit Außentemperatur u_0 und $p =$ Koeffizient des Wärmeverlustes.

Sei $p \in L^\infty(\Gamma_2)$, $q \in L^2(\Gamma_2)$, $p \geq 0$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $\text{meas}_{\mathbb{R}^{d-1}}(\Gamma_1) > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS &= \int_{\Gamma} f v \, dx \\ \Rightarrow \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_2} p u v \, dS}_{=: a(u,v)} &= \underbrace{\int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} q v \, dS}_{=: \varphi(v)} \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

$$V := \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_1} = 0\}$$

- V ist Hilbert Raum, da abgeschlossener UR von $H^1(\Omega)$:

sei $\{v_n\} \subset V$ (also $\gamma v_n \in L^2(\Gamma)$ mit $\gamma v_n|_{\Gamma_1} = 0$) und $v_n \rightarrow v$ in $H^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \gamma v \in L^2(\Gamma)$$

$$\begin{aligned} \|\gamma v\|_{L^2(\Gamma_1)} &= \|\gamma v - \gamma v_n\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \|\gamma v - \gamma v_n\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\stackrel{\text{Lemma 4.1}}{\leq} c \|v - v_n\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

also $v|_{\Gamma_1} = 0$.

- $\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ äquivalent zu $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ (lt. Bem. 4.11)
- a stetig (da $p \in L^\infty(\Gamma_2)$) und koerziv (da $p \geq 0$)
- φ stetig auf V (für $q \in L^2(\Gamma_2)$ und $f \in L^2(\Omega)$)

$\Rightarrow \exists!$ Lösung

Beispiel 5.6 (*Plattengleichung*)

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= f, & \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, & \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

RB impliziert $\nabla u|_{\Gamma} = 0$.

Anwendung: Durchbiegung einer belasteten Platte bei horizontaler Einspannung.

Mit 2. Greenscher Formel (=Folgerung 4.4):

$$\int_{\Omega} \Delta(\Delta u)v \, dx = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx + \underbrace{\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u \right) \, dS}_{=0}$$

\Rightarrow schwache Formulierung:

ges: $u \in V = H_0^2(\Omega)$ mit

$$\underbrace{\int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx}_{=:a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v \, dx}_{=: \varphi(v)} \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

- analog zur Friedrichs-Ungleichung (Lemma 4.2) gilt

$$c \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq a(u, u) \quad \forall u \in H_0^2(\Omega)$$

$\Rightarrow a$ ist koerziv und stetig.

- $\varphi \in V'$ (z.B. für $f \in L^2(\Omega)$)
 \Rightarrow eindeutige Lösung.

Ref: § 3.3 - 3.4, [Ha1] § 7

6 Finite Elemente

6.1 Grundbegriffe, Definitionen

Idee: Zerlegung von Ω in (endlich viele) Teilgebiete T_j (in 2D: Dreiecke oder Vierecke). Auf jedem T_j betrachtet man einen Raum von Formfunktionen („Finite Elemente“) P_j (=Polynome).

Definition 6.1 (*abstraktes finites Element; Ciarlet, 1978*)

Sei

- 1) $T \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit einem stückweise glatten Rand (meist Polyeder)
- 2) P ein endlichdimensionaler Funktionenraum auf T (Unterraum von $C(\bar{T})$, meist Polynome)
- 3) $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ eine Basis von P'

Das Tripel (T, P, Ψ) heißt *Finites Element*.

- T ist das *Elementgebiet*
- P ist der *Raum der „Formfunktionen“*, $\dim P = n$
- ψ_j , $j = 1, \dots, n$ sind die *Knotenvariablen*.

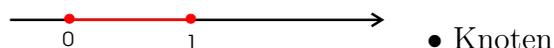
Beispiel 6.1 (*1D Lagrange-Element*)

$$T = (0, 1) \subset \mathbb{R}$$

$$P = P_1[0, 1] \quad : \quad \text{Polynome des Grades 1}$$

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2) \quad : \quad \psi_1(v(x)) = v(0), \quad \psi_2(v(x)) = v(1)$$

(typisch: Funktionswerte + Ableitungen an „Knoten“)



Eine mögliche Basis in P ist $(1 - x, x) = (v_1(x), v_2(x))$, d.h. es gilt $\psi_j(v_k) = \delta_{jk}$.

Definition 6.2 (*Knotenbasis*)

(T, P, Ψ) sei ein finites Element.

Eine Basis (v_1, \dots, v_n) von P heisst *Knotenbasis* (nodale Basis), falls $\psi_j(v_k) = \delta_{jk}$, $j, k = 1, \dots, n$ gilt. (=Funktionen, die an genau einem Punkt von T einen von Null verschiedenen Wert annehmen.)

Die Bedingung 3) in Definition 6.1 ist oft schwer zu überprüfen. Deshalb formulieren wir das

Lemma 6.1 (*Charakterisierung einer Basis in P'*)

Ein System von Funktionalen $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ ist genau dann eine Basis von P' , wenn aus $\psi_j(v) = 0$; $j = 1, \dots, n$; $v \in P$ $v \equiv 0$ folgt.

Beweis: (lin. Algebra)

Sei (v_1, v_2, \dots, v_h) eine Basis von P .

Ψ ist eine Basis in P' , wenn $\forall \psi \in P'$ solche $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ existieren, dass $\psi = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j$ gilt, oder äquivalent $\psi(v_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j(v_k)$, $k = 1, \dots, n$ (die Wirkung auf eine Basis ist ausreichend).

Die Matrix A mit $a_{kj} = \psi_j(v_k)$, $k, j = 1, \dots, n$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird betrachtet.

Die letzten Gleichungen sind äquivalent zu (A regulär $\Leftrightarrow \Psi$ ist Basis)

$$Ay = b, \quad y = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T, \quad b = (\psi(v_1), \dots, \psi(v_n))^T.$$

- Beweis der Notwendigkeit:

Ψ ist eine Basis von P' und $\psi_j(v) = 0$, $j = 1, \dots, n$; $v \in P$. Es gilt $v = \sum_{k=1}^n \beta_k v_k$ und damit $\psi_j(v) = 0 = \sum_{k=1}^n \beta_k \psi_j(v_k)$ oder $A^T z = 0$, $z = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$, die Matrix A^T ist aber regulär (Ψ ist Basis), d.h. $z = 0 \Rightarrow v \equiv 0$.

- Beweis der Hinlänglichkeit:

$\psi_j(v) = 0$, $j = 1, \dots, n \Rightarrow v \equiv 0$ bedeutet $A^T z = 0$ hat nur die triviale Lösung $\Rightarrow A$ ist regulär $\Rightarrow \Psi$ ist eine Basis.

□

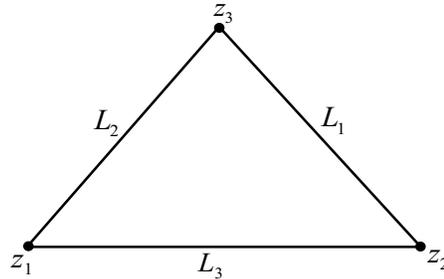
Bemerkung 6.1 Jedes $v \in P$ ist durch die n Werte der Funktionale Ψ (d.h. durch $\psi_j(v)$) eindeutig bestimmt.

Bemerkung 6.2 Sei $L = \{x : l(x) = 0\}$ eine Hyperebene in \mathbb{R}^d , wobei $l(x)$ eine nichttriviale lineare Funktion ist.

Wenn ein Polynom $p(x)$ des Grades $m \geq 1$ auf L verschwindet, kann man es als $p(x) = l(x)g(x)$, $\deg g = m - 1$ darstellen.

6.2 Dreieckselemente in \mathbb{R}^2

Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck, P_n der Raum aller Polynome in (x_1, x_2) des Grades $\leq n$; $\dim P_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.



Beispiel 6.2 „lineares Lagrange-Dreieck“, $n = 1$, $\dim P_1 = 3$

Knotenvariablen $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ mit (z.B.) $\psi_j(v) := v(z_j)$, wobei z_j die Ecken des Dreiecks T sind.

- Ψ ist Basis von P_1' , da die lineare Funktion v durch die 3 Funktionswerte in z_1, z_2, z_3 eindeutig bestimmt ist (mit Lemma 6.1)
- Für das Einheitsdreieck mit den Eckpunkten $z_1 = (0, 0)$, $z_2 = (1, 0)$, $z_3 = (0, 1)$ ist die Knotenbasis:

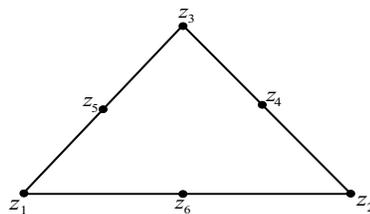
$$v_1(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2, \quad v_2(x_1, x_2) = x_1, \quad v_3(x_1, x_2) = x_2.$$

- alternative Knotenwahl: Seitenmittelpunkte \rightarrow *unstetiges lineares Element*.

Polynome höheren Grades braucht man für:

- höhere Approximationsordnung;
- Gleichungen höherer Ordnung, damit z.B. $P_n \subset H^2(T)$.

Beispiel 6.3 „quadratisches Lagrange Dreieck“, $n = 2$, $\dim P_2 = 6$



Knotenvariablen $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_6)$, $\psi_j(v) := v(z_j)$; $j = 1, \dots, 6$.

z_1, z_2, z_3 sind die Ecken,

z_4, z_5, z_6 sind die Seitenmittelpunkte.

- Ψ ist Basis von P'_2 , da:

Sei $v \in P_2$ mit $v(z_j) = 0$; $j = 1, \dots, 6$.

v ist quadratische Funktion auf L_1 mit den Nullstellen $z_2, z_3, z_4 \Rightarrow v$ verschwindet auf L_1

\Rightarrow (lt. Bem. 6.2) $v = l_1 \cdot g$ mit $\deg l_1 = \deg g = 1$ und

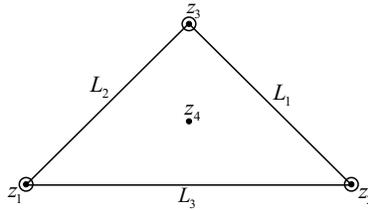
$$L_1 = \{x \mid l_1(x) = 0\}$$

$\Rightarrow g(z_1) = g(z_5) = g(z_6) = 0 \Rightarrow g \equiv 0$ da linear $\Rightarrow v \equiv 0$.

- Knotenbasis aus $\psi_j(v_k) = \delta_{jk}$ berechenbar.
Für Einheitsdreieck gilt z.B.

$$v_2(x_1, x_2) = x_1(2x_1 - 1).$$

Beispiel 6.4 „kubisches Hermite Dreieck“, $n = 3$, $\dim P_3 = 10$



Knotenvariablen $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_{10})$

$$z_4 = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

$$\psi_j(v) = v(z_j); \quad j = 1, \dots, 4$$

$$\psi_{5,6}(v) = \nabla v(z_1),$$

$$\psi_{7,8}(v) = \nabla v(z_2),$$

$$\psi_{9,10}(v) = \nabla v(z_3).$$

d.h.

$$\psi_5(v) = v_{x_1}(z_1),$$

$$\psi_6(v) = v_{x_2}(z_1).$$

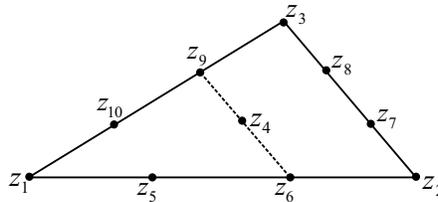
- Ψ ist Basis von P'_3 , da:
Sei $v \in P_3$ mit $v(z_j) = 0$; $j = 1, \dots, 10$.
 v ist kubische Funktion auf L_1 ; eindeutige Lösung der Hermite-Interpolation in z_2, z_3 mit Funktionswerten und Richtungsableitung gleich 0.

$$\Rightarrow v|_{L_1} \equiv 0$$

analog:

$$v|_{L_2} \equiv v|_{L_3} \equiv 0$$

also: v verschwindet in den Knoten des *kubischen Lagrange-Dreiecks*:



Rest-Beweis analog zu Bsp. 6.3 (vgl. [Bra] § 5.9)

- Begriffsbildung „Lagrange“, „Hermite“:
vgl. entsprechende Interpolationsaufgaben.

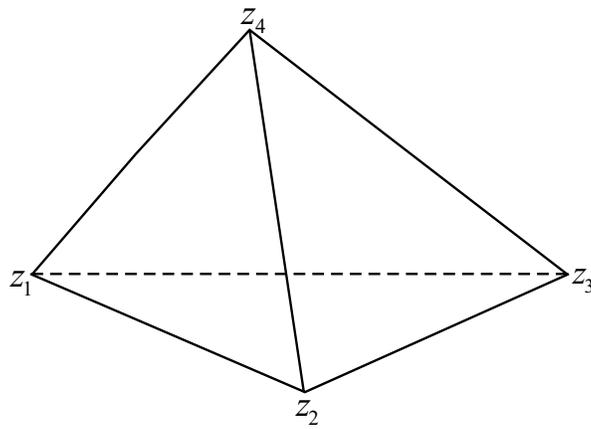
6.3 Tetraeder-Elemente im \mathbb{R}^3

Sei P_n der Raum aller Polynome des Grades n in $x = (x_1, x_2, x_3)$.

$$\dim P_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2}(j+1)(j+2) \quad (\text{Induktion!}), \text{ d.h.}$$

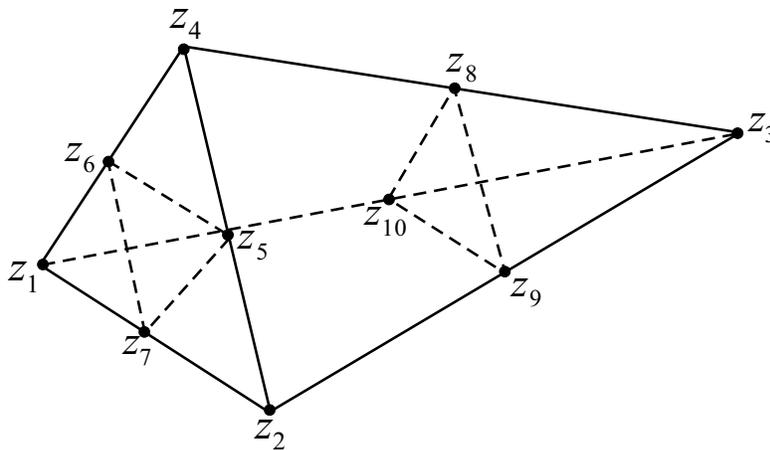
n	1	2	3	4
$\dim P_n$	4	10	20	35

Beispiel 6.5 „linearer Lagrange-Tetraeder“, $n = 1$, $\dim P_1 = 4$



$\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_4)$ mit $\psi_j(v) = v(z_j)$, $j = 1, \dots, 4$, wobei z_j die Ecken des Tetraeders sind.

Beispiel 6.6 „Quadratischer Lagrange-Tetraeder“, $n = 2$, $\dim P_2 = 10$

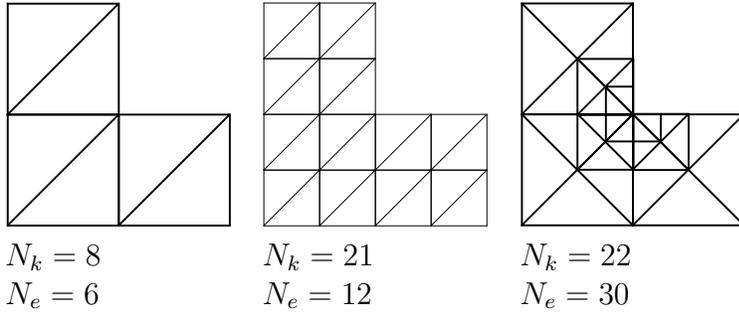


$\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_{10})$, $\psi_j(v) = v(z_j)$, $j = 1, \dots, 10$
 z_1, \dots, z_4 sind die Ecken
 z_5, \dots, z_{10} sind die Kantenmittelpunkte des Tetraeders.

6.4 Triangulierung für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wird zunächst als ein Polygon angenommen, d.h. es ist möglich, Ω vollständig in dreieckige finite Elemente zu zerlegen:

Quadratgittertriangulierung

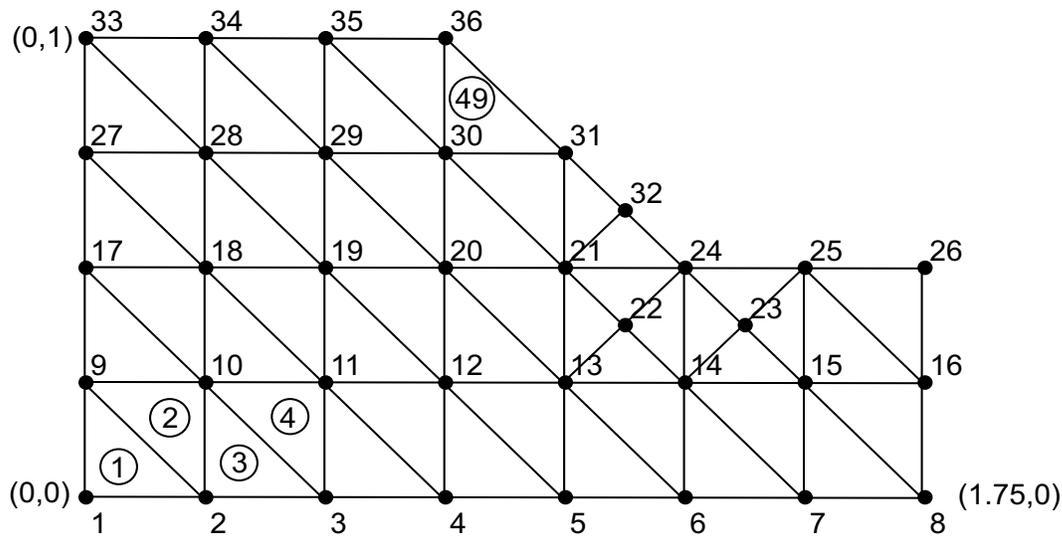


regelmäßig

lokale Verfeinerung bei einspringender Ecke (da Sing. der Lösung erwartet), ev. adaptiv durch a-posteriori Fehlerschätzer für jedes Dreieck

- Céa-Lemma: V_h asympt. dicht in $V \Rightarrow$ Konvergenz.
 h -Methode: Verfeinerung im Ort, lokaler Polynomgrad = konst.
 $h-p$ -Methode: Verfeinerung im Ort + Erhöhung des lokalen Polynomgrades \rightarrow nur für glatte Lösungen geeignet.
 (vgl. Interpolationsaufgabe: Splines \leftrightarrow Polynome mit hohem Grad)

Beispiel:



$N_k = 36$: Anzahl der Knoten.
 (x_j, y_j) , $j = 1, \dots, N_k$: Liste der Knotenkoordinaten
 $N_e = 49$: Anzahl der finiten Elemente

Beschreibung der Elemente:

Nummer	Knoten			Typ
1	1	2	9	1 = „lineares Lagrange-Dreieck“
2	2	10	9	1
3	2	3	10	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
49	30	31	36	1

Beschreibung der Knoten:

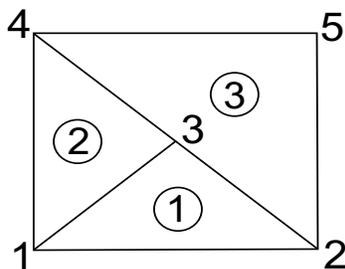
Nummer	Koordinaten		Typ
1	0.0	0.0	0 = „Randknoten“
2	0.25	0.0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
10	0.25	0.25	1 = „innerer Knoten“
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
36	0.75	1.0	0

Definition 6.3 (*zulässige Triangulierung*)

$\tau = \bigcup_{j=1}^{N_e} (T_j, P_j, \Psi_j)$ heißt eine *zulässige Triangulierung* von Ω , falls

- 1) $T_j, j = 1, \dots, N_e$ sind offene Dreiecke
- 2) $T_j \cap T_k = \emptyset$: die finiten Elemente sind disjunkt
- 3) $\bigcup_{j=1}^{N_e} \bar{T}_j = \bar{\Omega}$
- 4) für $j \neq k$ gilt $\bar{T}_j \cap \bar{T}_k$ ist entweder
 - a) leer
 - b) hat eine gemeinsame Seite
 - c) hat eine gemeinsame Ecke

Beispiel 6.7 (*unzulässige Triangulierung*)



$\bar{T}_1 \cap \bar{T}_3$ erfüllt keine der drei Alternativen.

3: „hängender Knoten“ ... liefert keinen Freiheitsgrad für Dreieck $\boxed{3}$

Die Eckpunkte der Dreiecke heißen Knoten. Es gibt *Randknoten* und *innere Knoten*. Für die homogene Dirichlet-Aufgabe benötigen wir nur die inneren Knoten und definieren:

$$V_h := \left\{ u \in C_0(\bar{\Omega}) \text{ (d.h. } u(x) = 0, x \in \Gamma = \partial\Omega); u(x) = \underbrace{\alpha_j + \beta_j x_1 + \gamma_j x_2}_{\text{stückweise linear}}, x = (x_1, x_2) \in T_j \right\}.$$

Bem: Beim linearen Lagrange-Dreieck folgt Stetigkeit entlang der Kanten.

Es gilt:

Lemma 6.2 Sei τ eine zulässige Triangulierung von Ω mit linearen Lagrange-Dreiecken.

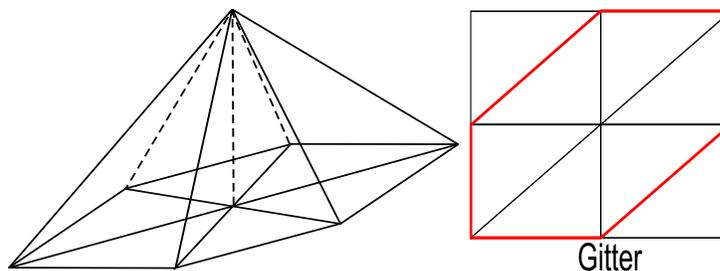
- 1) Es gilt $V_h \subset H_0^1(\Omega) \rightarrow$ konforme FEM
- 2) Jede Funktion $u \in V_h$ ist durch ihre Knotenwerte $u_j = u(x_j)$, $j = 1, \dots, N_i$, $N_k = N_i + N_R$ eindeutig bestimmt. (N_i : Anzahl innere Knoten, N_R : Anzahl Randknoten)
- 3) Es gilt: $N_i = \dim V_h$
- 4) Für alle $\underline{u} \in \mathbb{R}^{N_i}$, $\underline{u} = (u_1, \dots, u_{N_i})^T$ existiert genau eine Funktion $u \in V_h$ mit $u(x_j) = u_j$, $j = 1, \dots, N_i$. Für u gilt:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N_i} u_j b_j(x),$$

mit den *Basisfunktionen* $b_j: b_j(x_k) = \delta_{jk}$, $b_j \in V_h$

Bew (von (1)): $\nabla u|_{T_j} = (\beta_j, \gamma_j)^T \Rightarrow \nabla u \in L^2(\Omega); u \in C_0(\bar{\Omega}) \Rightarrow u \in H_0^1(\Omega)$

Beispiel 6.8



Folgerung:

Das *Galerkin-Verfahren* für die Dirichlet-Aufgabe

$$\begin{cases} -\Delta u = f & , \quad x \in \Omega \\ u = 0 & , \quad x \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (6.1)$$

lautet auf dem ∞ -dim. Raum $V = H_0^1(\Omega)$:

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V \quad (6.2)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx, \quad \varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx,$$

und auf dem endlich dimensionalen Unterraum V_h :

$$a(u_h, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V_h$$

Das ist zu folgendem Gleichungssystem äquivalent:

$$A\underline{u} = \underline{f} \text{ mit } A \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}, \quad \underline{u}, \underline{f} \in \mathbb{R}^{N_i}$$

$$\text{mit } a_{ij} := a(b_j(x), b_i(x)), \quad f_i := \varphi(b_i(x)).$$

Praktischer Ablauf der FEM:

1) Triangulierung

2) *Berechnung der Matrix-Elemente* von A („Steifigkeitsmatrix“)

a) $a_{ij} = 0$, falls x_i und x_j nicht direkt verbunden (d.h. benachbart) sind.

b) $a_{ij} = \sum_k \int_{T_k} (\nabla b_j, \nabla b_i) dx$, T_k habe die Ecken x_i und x_j (inkl. $i = j$)

- Berechnung von $\int_{T_k} (\nabla b_j, \nabla b_i) dx$ oft auf „Einheitsdreieck“ (siehe §6.5), dann „Assemblierung“ (d.h. \sum_k)
- typische Eigenschaften von A :
 - symmetrisch und positiv definit (\rightarrow Übung)
 - $\Rightarrow \exists!$ Lösung von $A\underline{u} = \underline{f}$.
 - Bandmatrix mit Bandbreite $O(\sqrt{N_i})$, schwach besetzt
 - schlecht konditioniert: $\kappa_2(A) = O(h^{-2})$ (vgl. § 3.6)

Beispiel 6.9

Betrachte (6.1) auf $\Omega = (0, 1)^2$ mit den Basisfunktionen aus Bsp. 6.8, regelmäßiger Triangulierung und zeilenweiser Nummerierung der inneren Knoten.

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \text{blocktridiag}(C, B, C) \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}, \\ B &= \text{tridiag}(-1, 4, -1) \in \mathbb{R}^{\sqrt{N_i} \times \sqrt{N_i}}, \\ C &= -I \in \mathbb{R}^{\sqrt{N_i} \times \sqrt{N_i}}. \end{aligned}$$

Bem: Die Matrix für das 5-Punkt-Differenzenverfahren war $\frac{1}{h^2}A$ (vgl. § 3.6, Übung).

- 3) Lösung von $Au = \underline{f}$ (z.B. mit Cholesky-Zerlegung [Aufwand hier: $O(N_i^2)$], präkonditioniertes CG-Verfahren)

6.5 Konvergenz konformer finiter Elemente

Frage: Konvergenz(ordnung) des Galerkin-Verfahrens, d.h.

ges: Abschätzung des Fehlers $u - u_h$, z.B. in der Norm von $V = H_0^1$.

Laut *Céa-Lemma*: beste Fehler-Abschätzung mittels

$$\min_{v \in V_h} \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

das ist die *Projektion* von u in $V_h \subset H_0^1(\Omega)$

Die *Konstruktion dieser Projektion* ist aber praktisch nicht möglich.

→ Oft wird statt dessen die sog. *interpolierende Funktion* (Interpolation der Knotenwerte) aus V_h zur Approximation von u benutzt. Für Lagrange Dreiecke gilt z.B.:

$$I_h u(x) = \sum_{j=1}^{N_i} u_j b_j(x), \quad \text{d.h. } u(x_j) = I_h u(x_j), \quad j = 1, \dots, N_i$$

Hinreichende Bedingung für punktweise Auswertung von u : $u \in H^2(d \leq 3)$

Offenbar gilt jetzt:

$$\|u - u_h\|_V \stackrel{\text{Céa}}{\leq} c \cdot \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V \leq c \cdot \|u - I_h u\|_V \quad (6.3)$$

und die Aufgabe reduziert sich auf die Untersuchung der *Interpolationseigenschaften*.

Ziel dieses Abschnittes sind Abschätzungen des Interpolationsfehlers der Form:

$$\|u - I_h u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(h) \|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

Weiterhin gilt $\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{N_e} \bar{T}_j$ und damit (vgl. Lemma 6.2)

$$\|u - I_h u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^{N_e} \|u - I_h u\|_{H^1(T_j)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.4)$$

Folglich genügt es, die *lokalen Interpolationseigenschaften* zu studieren. Man wechselt dabei auf ein sog. *Standardelement* (z.B. auf das *Einheitsdreieck*).

Definition 6.4 (*affin-äquivalente Mengen*)

Zwei Gebiete $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ heißen *affin-äquivalent*, wenn eine bijektive affine Abbildung $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ existiert,

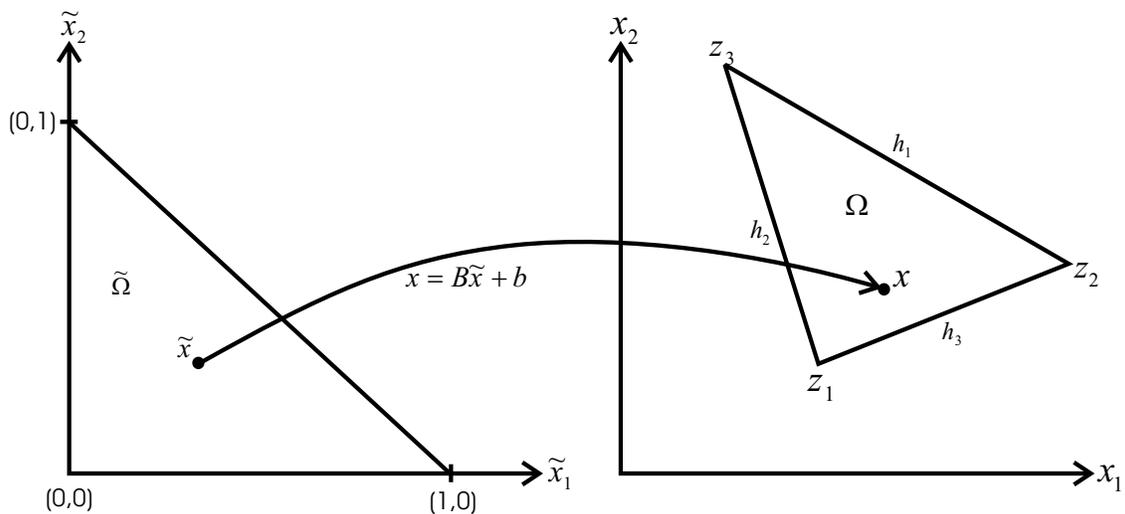
$$x = F(\tilde{x}) = B\tilde{x} + b, \quad B \in \mathbb{R}^{d \times d} \text{ (regulär)}, b \in \mathbb{R}^d$$

mit $\Omega = F(\tilde{\Omega})$.

Für die Funktionen auf Ω und $\tilde{\Omega}$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\tilde{x}) &: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \\ v(x) &= \tilde{v} \circ F^{-1}(x) = \tilde{v}(F^{-1}(x)) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{also: } &\tilde{v}(\tilde{x}) = v(x) \quad \forall x = F(\tilde{x}) \end{aligned}$$

Beispiel 6.10



$$x = B\tilde{x} + b \text{ mit } B = (z_2 - z_1 | z_3 - z_1), b = z_1.$$

Für den Wechsel auf ein Standardelement braucht man die *Änderung der Sobolev-Halbnormen bei einer affinen Abbildung*:

Lemma 6.3 (*Transformationsatz*)

Seien $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ zwei affin-äquivalente Gebiete.
Sei $v(x) \in W^{k,p}(\Omega)$, $k \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\Rightarrow \tilde{v}(\tilde{x}) = v(F(\tilde{x})) \in W^{k,p}(\tilde{\Omega})$$

und

$$\forall v(x) \in W^{k,p}(\Omega) : |\tilde{v}|_{p,k,\tilde{\Omega}} \leq c_{k,d} \|B\|^k |\det B|^{-\frac{1}{p}} |v|_{p,k,\Omega}, \quad (6.5)$$

$$\forall \tilde{v}(\tilde{x}) \in W^{k,p}(\tilde{\Omega}) : |v|_{p,k,\Omega} \leq c_{k,d} \|B^{-1}\|^k |\det B|^{\frac{1}{p}} |\tilde{v}|_{p,k,\tilde{\Omega}} \quad (6.6)$$

Um das Lemma 6.3 nutzen zu können, ist es nützlich, für die Normen $\|B\|_2$ und $\|B^{-1}\|_2$ *einfache geometrische Abschätzungen* zu gewinnen, z.B. unter Benutzung von

$$\begin{aligned} h &= \text{diam}(\Omega), \quad \tilde{h} = \text{diam}(\tilde{\Omega}) \quad (\leq \text{Umkreisdurchmesser}) \\ \rho &= \sup\{\text{diam } S, S \text{ ist eine Kugel in } \Omega\} \quad (\text{Inkreisdurchmesser}) \\ \tilde{\rho} &= \sup\{\text{diam } \tilde{S}, \tilde{S} \text{ ist eine Kugel in } \tilde{\Omega}\} \quad (\text{Inkreisdurchmesser}) \end{aligned}$$

Lemma 6.4 *Seien $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ zwei affin-äquivalente Gebiete. Für die Norm der Matrix B in der Abbildung $x = B\tilde{x} + b : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ gilt:*

$$(a) \quad \|B\| \leq \frac{h}{\tilde{\rho}}; \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\tilde{h}}{\rho}$$

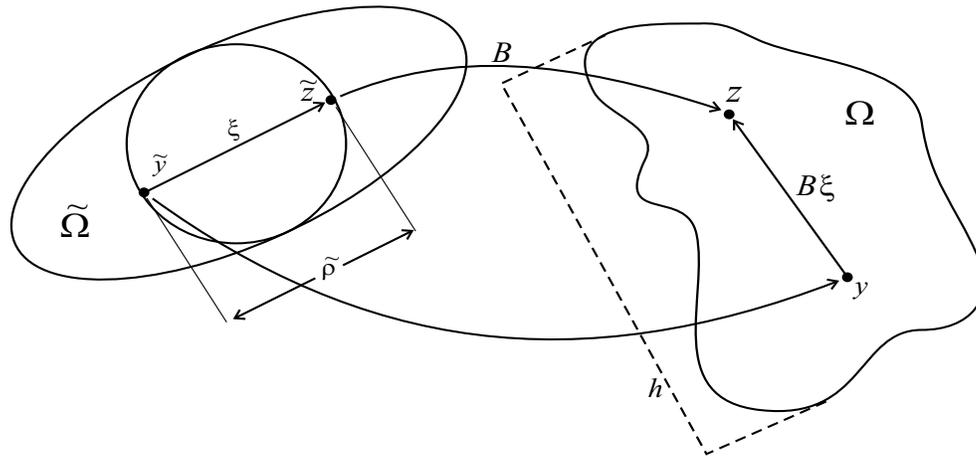
$$(b) \quad |\det B| = \frac{\text{meas}(\Omega)}{\text{meas}(\tilde{\Omega})}$$

Beweis:

(a) Für die Norm $\|B\|$ gilt:

$$\|B\| = \sup_{\xi \text{ mit } \|\xi\| = \tilde{\rho}} \frac{\|B\xi\|}{\tilde{\rho}}$$

Für ξ mit $\|\xi\| = \tilde{\rho}$ existieren $\tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{\Omega}$ mit $\xi = \tilde{z} - \tilde{y}$



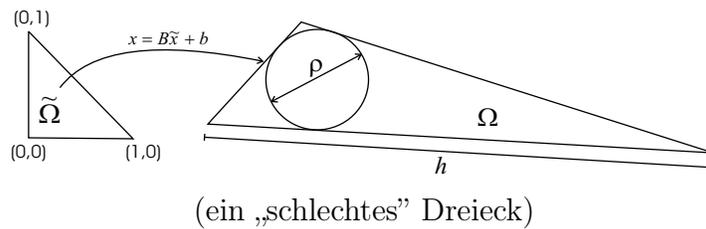
$\Rightarrow B\xi = B\tilde{z} - B\tilde{y} = z - y; y, z \in \Omega$
 und damit $\|B\xi\| = \|z - y\| \leq h$

(b) $|\det B|$ misst die Volumenänderung von $\tilde{\Omega}$.

□

Beispiel 6.10 (Fortsetzung):

$h = \text{diam } \Omega, \tilde{\rho} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} > \frac{2}{7} \Rightarrow \|B\| \leq 3.5 \cdot h, \frac{\pi}{2}\rho^2 \leq \det B \leq h^2$ (da $d = 2$)
 $\|B^{-1}\| \leq \frac{\tilde{h}}{\rho}$ mit: $\tilde{h} = \sqrt{2}, \rho$ kann aber beliebig klein werden:



Bei einer Hin- und Rücktransformation einer Funktion gemäß (6.5), (6.6) hat man den Faktor

$$\|B\| \cdot \|B^{-1}\| \leq \frac{h\tilde{h}}{\rho\tilde{\rho}} \leq c \frac{h}{\rho}.$$

Der Fall $\frac{h}{\rho} \gg 1$ muss ausgeschlossen werden.

Definition 6.5 Eine Familie von Triangulierungen $\{\tau_h\}_{h>0}$ von Ω mit $h_\tau = \max_{1 \leq j \leq N_e(\tau)} h_j \rightarrow 0$ heißt regulär, wenn $\forall T_j \in \bigcup \tau_h, \frac{h_j}{\rho_j} \leq \sigma = \text{konst}$ gilt.

Für Dreieckselemente ist das äquivalent zu: alle Innenwinkel sind glm. nach unten beschränkt („Zlamal-Bedingung“).

In der Praxis werden nur reguläre Gitter verwendet.

Folgende Annahmen sind für Satz 6.1 notwendig:

- 1) Die Familie der Triangulierungen von Ω ist regulär.
- 2) Alle finiten Elemente T_j sind zum Referenzgebiet (Einheitsdreieck) \tilde{T} affin-äquivalent.
- 3) Alle finiten Elemente besitzen einen Lipschitz-Rand.

Satz 6.1 (Approximationssatz für Interpolation)

Es sollen ganze Zahlen $0 \leq l \leq k - 1$, $k \geq 2$ existieren, sodass

$$\begin{aligned} P_{k-1}(\tilde{T}) &\subset \tilde{P} \subset H^l(\tilde{T}) \\ H^k(\tilde{T}) &\hookrightarrow C^s(\tilde{T}), \end{aligned}$$

wobei s die maximale Ordnung der partiellen Ableitungen bezeichnet, die in der Definition von $\tilde{\Psi}$ (Knotenvariable) vorkommen. $(\tilde{T}, \tilde{P}, \tilde{\Psi})$ ist das Referenz-Finite-Element.

Dann existiert eine von h unabhängige Konstante c , sodass für alle $v \in H^k(\Omega) \cap V$ gilt:

$$\left(\sum_{j=1}^{N_i} \|v - I_h v\|_{H^m(T_j)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq ch^{k-m} |v|_{k,2,\Omega}, \quad 0 \leq m \leq \min\{k, l\} \quad (6.7)$$

$$\|v - I_h v\|_{H^m(\Omega)} \leq ch^{k-m} |v|_{k,2,\Omega}, \quad 0 \leq m \leq \min\{1, l\} \quad (6.8)$$

Beweis:

Fall 1: $d = 2$; regelmäßiges Gitter, d.h. alle Dreiecke sind zum Einheitsdreieck \tilde{T} kongruent (vgl. Bsp. 6.8).

$$T_h := h\tilde{T} = \{x = hy \mid y \in \tilde{T}\}, \quad h \leq 1$$

Schritt 1: $I : H^k(T) \rightarrow P_{k-1}(\tilde{T})$ sei die Interpolation (z.B. Lagrange) zu den $J = \frac{1}{2}k(k+1) = \dim P_{k-1}$ Knotenvariablen ψ_1, \dots, ψ_J (bilden Basis von $P'_{k-1}(\tilde{T})$), d.h.

$$\psi_j(u) = \psi_j(Iu); \quad j = 1, \dots, J. \quad (6.9)$$

Laut Normierungssatz 4.1 ist

$$\|v\|^* := \sum_{j=1}^J |\psi_j(v)| + |v|_{k,T}$$

äquivalente Norm zu $\|v\|_{H^k(T)}$.

$\forall u \in H^k(T) \hookrightarrow C^s(\bar{T})$ (laut Voraussetzung) gilt

$$\begin{aligned} \|u - Iu\|_{H^k(T)} &\leq c \|u - Iu\|^* \\ &= c \left(\sum_{j=1}^J \underbrace{|\psi_j(u - Iu)|}_{=0 \text{ mit (6.9)}} + |u - Iu|_{k,T} \right) = c |u|_{k,T}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

da $\partial^\alpha(\underbrace{Iu}_{\in P_{k-1}}) = 0$ für $|\alpha| = k$.

Schritt 2: sei $u \in H^k(T_h)$:

$$\begin{aligned} v(y) &:= u(hy) \in H^k(\tilde{T}) \\ \partial^\alpha v &= h^{|\alpha|} \partial^\alpha u, \quad \forall |\alpha| \leq k; \quad dy = h^{-2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |v|_{n,\tilde{T}}^2 &= \sum_{|\alpha|=n} \int_{\tilde{T}} (\partial^\alpha v)^2 dy = \sum_{|\alpha|=n} \int_{T_h} h^{2n} (\partial^\alpha u)^2 h^{-2} dx \\ &= h^{2n-2} |u|_{n,T_h}^2 \quad \forall n \leq m \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\Rightarrow \|u\|_{H^m(T_h)}^2 = \sum_{n \leq m} |u|_{n,T_h}^2 \stackrel{(6.11)}{=} \sum_{n \leq m} h^{-2n+2} |v|_{n,\tilde{T}}^2 \stackrel{h \leq 1}{\leq} h^{-2m+2} \|v\|_{H^m(\tilde{T})}^2$$

Verwende diese Ungleichung für $u - Iu$:

$$\begin{aligned} \|u - Iu\|_{H^m(T_h)} &\leq h^{-m+1} \|v - Iv\|_{H^m(\tilde{T})} \stackrel{m \leq k}{\leq} h^{-m+1} \|v - Iv\|_{H^k(\tilde{T})} \\ &\stackrel{(6.10)}{\leq} ch^{-m+1} |v|_{k,\tilde{T}} \stackrel{(6.11)}{=} ch^{k-m} |u|_{k,T_h} \end{aligned}$$

Summation über alle Dreiecke liefert (6.7). (6.8) folgt dann aus (6.4).

Fall 2: unregelmäßiges Gitter benötigt Transformationslemma 6.3 $\forall T_j$:

$$F_j(\tilde{x}) = B_j\tilde{x} + b_j \text{ und } \|B_j\| \cdot \|B_j^{-1}\| \leq c \frac{h_j}{\rho_j} \leq c\sigma.$$

(Details: [Bra] § 6)

□

Bemerkung 6.3

- 1) Im Approximationssatz steht links die „gröbere Norm“ (d.h. kleinerer Sobolev-Index m). Im Gegensatz dazu sind *inverse Abschätzungen* (vgl. (6.17)).
- 2) In (6.8) wird die *globale* Regularität von $I_h v \in V_h$ verwendet (bisher nur $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ betrachtet, vgl. Lemma 6.2);
in (6.7) die *lokale* Regularität auf T_j . Die Konvergenzordnung $k - m$ hängt also ab von:

- Polynomgrad $k - 1$ der Formfunktionen,
- Regularität von v (in $H^k(\Omega)$),
- (globale) Regularität von V_h in $H^m(\Omega)$
- Wahl der Fehlernorm $\|\cdot\|_{H^m}$

Bsp: (lineares Lagrange-Dreieck): $\tilde{P} = P_1(\tilde{T}) \subset H^1(\tilde{T})$, $H^2(\tilde{T}) \hookrightarrow C(\tilde{T})$, $d \leq 3$; d.h. $k = 2$, $s = 0$

(6.2) und (6.8) mit $m = 1$ liefern die *Konvergenz des Galerkin-Verfahrens in $H^1(\Omega)$* :

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c_1 \|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2 h^{k-1} |u|_{k,2,\Omega}$$

- *lineare* Lagrange- Finite Elemente ($k = 2$, $d \leq 3$): Für $u \in H^2(\Omega) \cap V$ erhalten wir lineare Konvergenz.

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq ch |u|_{H^2(\Omega)} \tag{6.12}$$

- *quadratische* Finite Elemente ($k = 3$): man erhält theoretisch quadratische Konvergenz. Auf einem Polygon Ω ($\Rightarrow \partial\Omega$ nicht glatt!) gilt aber typischerweise $u \notin H^3(\Omega)$!

Lemma 6.5 (*elliptische Regularität*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ beschränkt, $\partial\Omega$ Lipschitz, und

- 1) $\partial\Omega \in C^2$ (falsch für Polygon!) oder
- 2) Ω konvex.

Dann gilt für die Dirichlet-Aufgabe (6.1):

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\Omega)\|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (6.13)$$

(triviales) Bsp: $-u'' = f \in L^2(0, 1)$, $u(0) = u(1) = 0 \Rightarrow u \in H^2(0, 1)$.

6.6 L^2 -Abschätzung für lineare Elemente

Die *optimale Konvergenzordnung* für lineare Elemente ist $O(h)$:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c_1 \cdot h |u|_{H^2(\Omega)},$$

falls $u \in H^2(\Omega) \cap V$.

Die Fünfpunktformel liefert aber $O(h^2)$ -Konvergenz, da der Fehler dort in der L^2 -Norm gemessen wird.

(6.8) mit $m = 0, k = 2$ suggeriert ebenfalls quadratische Konvergenz in $L^2(\Omega)$; das Céa-Lemma gilt aber nur in $H^1(\Omega)$. Für die L^2 -Fehlerabschätzung betrachten wir das zu (6.1) *adjungierte Problem*.

Definition 6.6 Sei a eine Bilinearform auf V , $\varphi \in V'$ und $a^*(u, v) := a(v, u)$; $u, v \in V$.

$$a^*(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V \quad (6.14)$$

heißt das zu (6.2) adjungierte Problem.

Für symmetrisches a gilt $a^* = a$.

Satz 6.2 (L^2 -Konvergenz)

Die Voraussetzungen von Satz 6.1 seien erfüllt, und $d \leq 3$.

Ferner habe (6.14) $\forall \varphi \in L^2(\Omega)'$ eine Lösung $u^* \in H^2(\Omega) \cap V$ mit

$$\|u^*\|_{H^2(\Omega)} \leq c_2 \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \quad (6.15)$$

$\Rightarrow \exists c_3 > 0$ (unabhängig von u und h), so dass

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c_3 h^2 |u|_{H^2(\Omega)}.$$

Beweis:

Sei $e := u - u_h \in L^2(\Omega)$ der Fehler.

Grundidee ist ein *Dualitätsargument* („Nitsche-Trick“), bei dem e als Lösung der *adjungierten Aufgabe* durch ein geeignetes $w \in V$ dargestellt wird:

$$a(v, w) = \varphi(v) := (e, v) \quad \forall v \in V; \varphi \in (L^2(\Omega))' \quad (6.16)$$

Das Galerkin-Verfahren dazu liefert $w_h \in V_h$ mit

$$\|w - w_h\|_{H^1(\Omega)} \stackrel{(6.12)}{\leq} ch \|w\|_{H^2(\Omega)} \stackrel{(6.13)}{\leq} c_4 h \|\varphi\|_{L^2(\Omega)'} = c_4 h \|e\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mit (6.16) gelingt der Übergang von $\|e\|_{H^1}$ zu $\|e\|_{L^2}$:

$$\begin{aligned} \|e\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (e, e) \stackrel{(6.16)}{=} a(e, w) \stackrel{\text{fund. Orthog.}}{=} a(e, w - w_h) \stackrel{\text{a...stetige BLF}}{\leq} c \|e\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|w - w_h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq c \|e\|_{H^1(\Omega)} \cdot h \|e\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Dabei haben wir die *fundamentale Orthogonalität* für den Fehler e benutzt:

$$e \perp_a V_h \ni w_h, \text{ d.h. } a(e, w_h) = 0.$$

Damit gilt:

$$\|e\|_{L^2(\Omega)} = \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch \|e\|_{H^1(\Omega)} \stackrel{(6.12)}{\leq} ch^2 |u|_{H^2(\Omega)}.$$

□

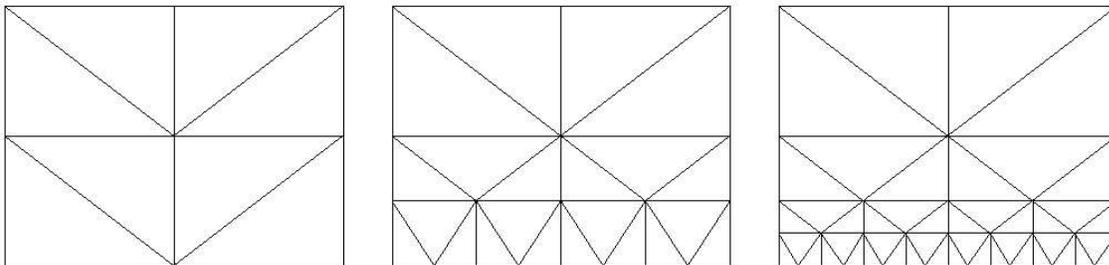
6.7 L^∞ -Abschätzung für lineare Elemente

Definition 6.7 Eine Familie von Triangulierungen $\{\tau_h\}_{h>0}$ mit $h_\tau = \max_{1 \leq j \leq N_e(\tau)} h_j \rightarrow 0$ erfüllt die inverse Bedingung, wenn ein $\nu > 0$ existiert, so dass

$$\frac{h_\tau}{h_j} < \nu \quad \forall j = 1, \dots, N_e(\tau_h), \quad \forall \tau_h$$

mit $h_j = \text{diam}(T_j)$.

Bemerkung 6.4 In regulären Triangulierungen können die Elemente nicht zu „schmal“ werden (d.h. Innenwinkel glm. nach unten beschränkt). Die inverse Bedingung verhindert, dass die Größe der Elemente zu unterschiedlich ist.



Diese Triangulierungen sind zulässig, regulär, erfüllen aber nicht die inverse Bedingung (wenn man sich die Verfeinerungsfolge unendlich fortgesetzt denkt).

Satz 6.3 (L^∞ -Konvergenz)

Die Voraussetzungen von Satz 6.2 und die inverse Bedingung seien erfüllt.

$\Rightarrow \exists c > 0$ (unabhängig von u und h), so dass

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ch^{2-\frac{d}{2}} |u|_{H^2(\Omega)}.$$

Beweis:

Schritt 1: Herleitung der *inversen Abschätzung*:

$$\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ch^{-\frac{d}{2}} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v_h \in V_h. \quad (6.17)$$

\rightarrow Übung für $d = 2$.

Bem: Da $\dim V_h < \infty$, sind $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent.
Auf $L^\infty(\Omega)$ gilt aber:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \|v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Schritt 2 (für $d = 2$):

- $\forall \tilde{u} \in H^2(\tilde{T})$ gilt (\tilde{T} ... Einheitsdreieck):

$$\|\tilde{u} - I\tilde{u}\|_{L^\infty(\tilde{T})} \stackrel{\text{Sobolev Einb.}}{\leq} C \|\tilde{u} - I\tilde{u}\|_{H^2(\tilde{T})} \stackrel{(6.10)}{\leq} C |\tilde{u}|_{2,\tilde{T}}$$

Sei $T \in \tau$ ein Dreieck der Triangulierung, $F: \tilde{T} \rightarrow T$, $\tilde{u} = u \circ F$:

$$\begin{aligned} \|u - I_h u\|_{L^\infty(T)} &= \|\tilde{u} - I\tilde{u}\|_{L^\infty(\tilde{T})} \leq C |\tilde{u}|_{2,\tilde{T}} \\ &\stackrel{(6.5)}{\leq} C \cdot h |u|_{2,T} \leq C \cdot h |u|_{2,\Omega} \quad \forall T \in \tau \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurde das Transformationslemma 6.3 mit

$$\|B\|^2 \leq C \cdot h^2, \quad |\det B|^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{c}{\rho} \stackrel{\tau \text{ regulär}}{\leq} \frac{c}{h} \quad (\text{siehe Bsp. 6.9})$$

verwendet.

$$\Rightarrow \|u - I_h u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \cdot h |u|_{2,\Omega} \quad (6.18)$$

•

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \|u - I_h u\|_{L^\infty(\Omega)} + \underbrace{\|u_h - I_h u\|_{L^\infty(\Omega)}}_{\in V_h} \\ &\stackrel{(6.18), (6.17)}{\leq} C \cdot h |u|_{2, \Omega} + C \cdot h^{-1} \|u_h - I_h u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \|u_h - I_h u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} + \|u - I_h u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\stackrel{\text{Satz 6.2}, (6.12)}{\leq} Ch^2 |u|_{2, \Omega} + Ch^2 |u|_{2, \Omega} \end{aligned}$$

liefert die Behauptung.

□

Bemerkung 6.5 Für lineare Lagrange-Dreiecke ist die scharfe Abschätzung (siehe [GR] § 4.5):

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 |\ln h| \|u\|_{W^{2, \infty}(\Omega)}.$$

Die Fehlerordnung ist also $2 - \varepsilon \forall \varepsilon > 0$.

Ref: [Bra] § II, [Ha1] § 8.2-8.4, [GR] § 4.

7 Mehrgitterverfahren

7.1 Iterationsverfahren

FEM, Finite-Differenzen- und Finite-Volumen-Methoden führen auf ein Gleichungssystem

$$Ay = b, A \in \mathbb{R}^{n \times n}; y, b \in \mathbb{R}^n; A = A^T > 0 \quad (7.1)$$

A ... groß, schwach besetzt, schlecht konditioniert; A sei regulär.

- eine Lösungsmöglichkeit: *iterativ*

(7.1) äquivalent zu $By = (B - A)y + b$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$... regulär

Iteration: Startvektor y_0

$$y_{l+1} = \underbrace{B^{-1}(B - A)}_{=:T \dots \text{Iterationsmatrix}} y_l + B^{-1}b = y_l - B^{-1}(\underbrace{Ay_l - b}_{=:r_l \dots \text{Residuum}}); l \in \mathbb{N}_0 \quad (7.2)$$

- (7.2) *konvergiert* $\Leftrightarrow \rho(T) < 1$ (Spektralradius)

Sei $A = L + D + R$ (L, R ... untere/obere Dreiecksmatrizen)

Varianten:

- 1) $B = \frac{1}{\tau}I$... Methode der einfachen Iteration,
 $\tau > 0$... Iterationsparameter
- 2) $B = D$... Jacobi-Verfahren
- 2a) $B = \frac{1}{\omega}D$... gedämpftes Jacobi-Verfahren, $\omega > 0$
- 3) $B = L + D$... Gauß-Seidel-Verfahren
- 3a) $B = L + \frac{1}{\omega}D$... SOR-Verfahren (successive overrelaxation), $0 < \omega < 2$

- typische Situation bei FEM:

$$\|u_{h,l+1} - u_h\| \leq \|T_h\| \cdot \|u_{h,l} - u_h\|, \quad l \in \mathbb{N}$$

mit $\lim_{h \rightarrow 0} \|T_h\| = 1 \Rightarrow$ Konvergenzrate gitterabhängig!
(Rate wird für genauere Lösungen u_h immer schlechter)

Die Methode der einfachen Iteration

für das Gleichungssystem

$$Ay = b, A \in \mathbb{R}^{n \times n}; y, b \in \mathbb{R}^n, A = A^T > 0$$

Iteration:

$$y_{l+1} = \underbrace{(I - \tau A)}_{=T} y_l + \tau b \quad (7.3)$$

Für den Fehler gilt:

$$e_{l+1} := y_{l+1} - y = (I - \tau A) \underbrace{(e_l + y)}_{=y_l} + \tau \underbrace{b}_{=Ay} - y = (I - \tau A)e_l$$

$$\Rightarrow \|e_{l+1}\|_2 \leq \|I - \tau A\|_2 \cdot \|e_l\|_2$$

Die *Spektralnorm* einer symmetrischen Matrix $I - \tau A$ ist beschränkt durch

$$\|I - \tau A\|_2 = \max_{1 \leq j \leq n} |1 - \tau \lambda_j| \leq \max_{\gamma_1 \leq \lambda \leq \gamma_2} |1 - \tau \lambda| =: g(\tau),$$

mit $0 < \gamma_1 \leq \lambda_{\min}(A)$ und $\lambda_{\max}(A) \leq \gamma_2$.

- Ziel: schnellste Konvergenz \Rightarrow wähle $\tau = \tau^*$ als Lösung des *Min-Max-Problems*

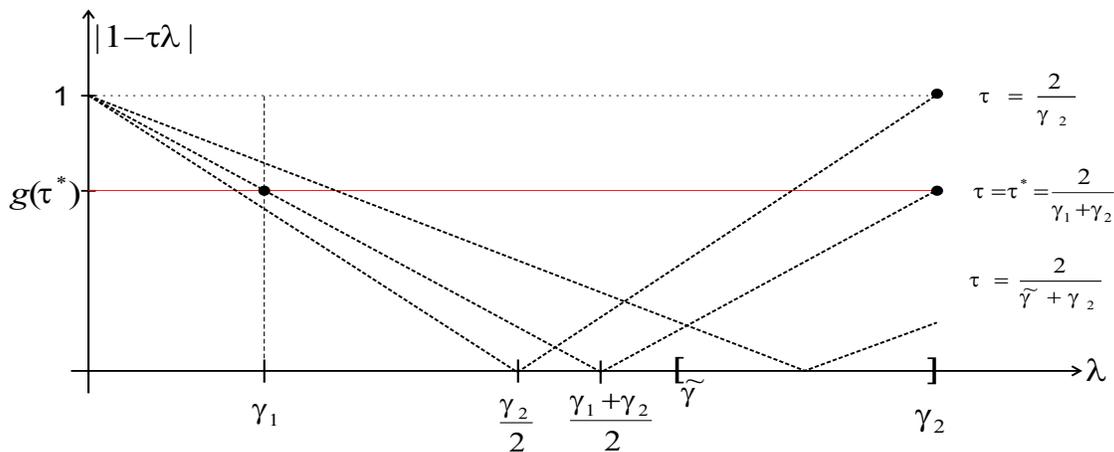
$$\min_{\tau \in \mathbb{R}} \underbrace{\max_{\gamma_1 \leq \lambda \leq \gamma_2} |1 - \tau \lambda|}_{\lambda=:g(\tau)} = g(\tau^*)$$

Lösung:

$$\tau^* = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad g(\tau^*) = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} < 1$$

ferner:

$$g(\tau) < 1 \Leftrightarrow 0 < \tau < \frac{2}{\gamma_2} \quad (7.4)$$



Bsp: Dirichlet-Problem am Rechteck (Bsp. 6.9; vgl. Unterschied zu § 3.6):

Für die Galerkin-Matrix A gilt:

$$\lambda_{\min} = O(h^2), \lambda_{\max} = O(1) \Rightarrow g(\tau^*) = 1 - O(h^2); \quad (7.5)$$

für andere Beispiele oft noch schlechter \rightarrow *Konvergenz* des Verfahrens (7.3) *extrem langsam* \rightarrow unbrauchbar.

Bemerkung 7.1

- 1) $\tau = \tau^*$ dämpft hochfrequente Fehlerkomponenten (d.h. $\lambda \lesssim \gamma_2$) zu wenig $\Rightarrow \tau = \tau^*$ wird nicht verwendet.
- 2) Für $\tau = \frac{2}{\gamma_2}$ erreichen wir die *bestmögliche* (aber immer noch schlechte) Dämpfung von *niedrigfrequenten Komponenten* des Fehlers (kleine Eigenwerte $\lambda \gtrsim \gamma_2$).
- 3) Für $\tau < \frac{2}{\gamma_2}$ können wir eine „gute“ Dämpfung von *hochfrequenten Komponenten* des Fehlers erreichen: d.h. für $\lambda \in [\tilde{\gamma}, \gamma_2]$ falls $\tau = \frac{2}{\tilde{\gamma} + \gamma_2} \Rightarrow$ Glättung des Fehlers ... 1. Grundidee.
- 4) Die *niedrigfrequenten Komponenten* können aber *gut auf einem groben Gitter* dargestellt werden ... 2. Grundidee.

Bemerkung 7.2

Sei $Ay = b$ eine Diskretisierung des Stationärproblems

$$\begin{cases} -\Delta v = f & , \quad \Omega \\ v = 0 & , \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

(7.3) ist auch die zeitlich explizite Diskretisierung (mit $\tau = \Delta t$ und $y_l \approx u(x, t_l)$) von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & , \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & , \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & , \quad \Omega \end{cases} \quad (7.6)$$

Es gilt:

- $u(\cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} v$
- (7.6) glättet die hochfrequenten Anteile von u_0 sehr „schnell“
- zeitlich explizite Finite Differenzen für (7.6) haben die Stabilitätsbedingung $\tau \leq \frac{h^2}{2}$; vgl. (7.4): $0 < \tau < \frac{2}{\gamma_2} = O(h^2)$.

7.2 Idee von Mehrgitterverfahren

Modellproblem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes Polygon und $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine *Bilinearform*:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [a(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + b(x)u(x)v(x)] dx$$

mit $0 < a_0 \leq a(x) \leq a_1$, $0 \leq b_0 \leq b(x) \leq b_1 \quad \forall x \in \Omega$.

Damit betrachten wir die folgende *Dirichlet-Aufgabe*:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla u(x)) + b(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Die *Variationsformulierung* lautet:

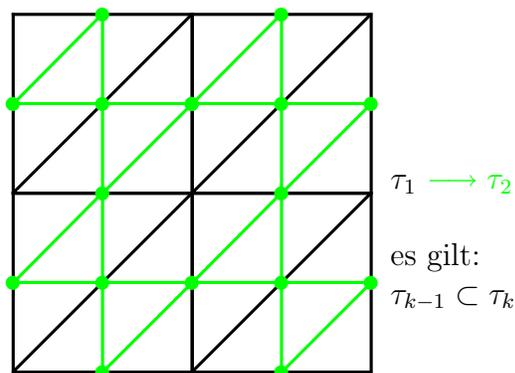
Finde $u \in V = H_0^1(\Omega)$ mit $a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V$ wobei $\varphi(v) = (f, v)$ bezeichnet.
 $f \in L^2(\Omega)$ garantiert die Existenz einer Lösung $u \in V$ und sogar $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Multigrid: Idee, Notationen

→ Konstruktion einer *Folge von Triangulierungen* $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von Ω :

τ_1 sei gegeben,

τ_k aus τ_{k-1} (für $k \geq 2$) durch *gleichmäßige Verfeinerung*: Jedes Dreieck in 4 kongruente Dreiecke zerteilen, d.h. alle Seitenmittelpunkte → neue Knoten:



- sei $V_k \dots$ Raum der stückweise linearen Funktionen auf τ_k
 → Folge von eingebetteten Unterräumen: $V_{k-1} \subset V_k; n_k = \dim V_k$
 Folge diskreter Probleme: $a(u_k, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V_k$

- sei $h_k := \max_{T_j \in \tau_k} \text{diam}(T_j)$ die *Feinheit der Triangulierung*.
 Es gilt: $h_k = \frac{1}{2}h_{k-1}$; die Triangulierungsfolge $\{\tau_k\}$ ist regulär und erfüllt die inverse Bedingung.

$$\Rightarrow \underline{c}h_k^2 \leq \text{meas}(T_j) \leq \bar{c}h_k^2 \quad \forall T_j \in \tau_k, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (7.7)$$

- *Fehlerabschätzung*:

$$\|e_k\|_{H^s(\Omega)} \leq C \cdot h_k^{2-s} \|u\|_{H^2(\Omega)}; \quad s = 0, 1$$

- *Ziel*: konstruiere $\hat{u}_k \in V_k$ als Lösungsapproximationen für u_k mit

$$1) \quad \|u - \hat{u}_k\|_{H^s(\Omega)} \leq \tilde{C} \cdot h_k^{2-s} \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

- 2) nur $O(n_k)$ arithmetische Operationen (vgl. mit FFT für Dirichlet-Problem am Rechteck: Aufwand $O(n \log n)$)

⇒ Multigrid-Methoden sind *asymptotisch optimal* (siehe § 7.8).

7.3 Gitterabhängige Normen

Definition 7.1 *gitterabhängiges Skalarprodukt auf V_k durch:*

$$(v, w)_k = h_k^2 \sum_{j=1}^{n_k} v(p_j)w(p_j) = h_k^2(\underline{v}, \underline{w}),$$

mit $p_j, j = 1, \dots, n_k \dots$ inneren Knoten von τ_k

Sei $v \in V_k$ fixiert. Dann definiert $a(v, w), w \in V_k$ ein lineares Funktional auf V_k , das die *Darstellung* $(v^*, w)_k$ besitzt.

Damit definieren wir den *linearen Operator* (keine Matrix!)

$$A_k : V_k \rightarrow V_k, v \mapsto v^* = A_k v, \quad \text{d.h. } (A_k v, w)_k = a(v, w), \quad \forall v, w \in V_k. \quad (7.8)$$

Die Darstellung von $\varphi(w), w \in V_k$ sei $(f_k, w)_k$.

Damit sind die diskreten Probleme $a(v_k, w) = \varphi(w)$ äquivalent zur folgenden (Operator-) Gleichung für v_k :

$$A_k v_k = f_k, \quad f_k, v_k \in V_k.$$

Die Operatoren A_k sind bzgl. $(\cdot, \cdot)_k$ *selbstadjungiert* und *positiv definit* (wegen $a(v, w)$).

Damit ist es möglich, die *Energienormen*

$$\|v\|_{E,k,s} := ((A_k^s v, v)_k)^{\frac{1}{2}}, \quad s \in \mathbb{Z}$$

zu benutzen.

Es gilt offenbar:

$$\begin{aligned} \|v\|_{E,k,0} &= ((v, v)_k)^{\frac{1}{2}} \dots \text{die durch } (\cdot, \cdot)_k \text{ induzierte Norm.} \\ \|v\|_{E,k,1} &= \|v\|_E = (a(v, v))^{\frac{1}{2}} \dots \text{die energetische Norm} \end{aligned}$$

Lemma 7.1

Die Norm $\|\cdot\|_{E,k,0}$ ist zur L^2 -Norm in V_k äquivalent:

$$C_1 \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{E,k,0} \leq C_2 \|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{mit } k\text{-unabhängigen } C_1, C_2 > 0$$

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{T_j \in \tau_k} \int_{T_j} v^2(x) dx \\ &= \sum_{T_j \in \tau_k} \frac{\text{meas}(T_j)}{3} \sum_{i=1}^3 v^2(m_i(T_j)), \quad (\text{da } v|_{T_j} \text{ linear}), \end{aligned}$$

wobei m_i die *Seitenmittelpunkte* gegenüber p_i bezeichnet.

Die Funktion $v(x)$ ist *linear* und damit

$$\begin{pmatrix} v(m_1) \\ v(m_2) \\ v(m_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(p_1) \\ v(p_2) \\ v(p_3) \end{pmatrix}, \quad \text{oder } v_m = Bv_p; \quad v_m, v_p \in \mathbb{R}^3$$

$$\lambda_1(B) = 1; \quad \lambda_{2,3}(B) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \|v_p\|_2^2 \leq \|v_m\|_2^2 \leq \|v_p\|_2^2$$

Mit (7.7) folgt die Behauptung:

$$\|v\|_{E,k,0}^2 = h_k^2 \sum_{j=1}^{n_k} v^2(p_j) \quad \text{ist äquivalent zu } \|v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

□

Lemma 7.2 (*verallgem. Cauchy-Schwarz Ungleichung*)

Es gilt:

$$|a(v, w)| \leq \|v\|_{E,k,1+s} \cdot \|w\|_{E,k,1-s}, \quad s \in \mathbb{Z}$$

Beweis: klar für $s = 0$; Rest: Übung

7.4 Der Multigrid-Algorithmus

Der Multigrid-Algorithmus (MG) ist eine iterative Methode zur Lösung der Gleichung

$$A_k \underbrace{u_k}_{\in V_k} = \underbrace{f_k}_{\in V_k} \quad \text{für ein } k > 1 \quad (7.9)$$

im endlich-dim. Hilbertraum V_k (u_k, f_k sind keine Basisdarstellungen \Rightarrow kein lineares Gleichungssystem).

Die Methode besteht aus zwei wesentlichen Komponenten: *Fehlerglättung* auf V_k (feines Gitter) und *Grobitterkorrektur* auf V_{k-1} .

Damit sind zwei Operatoren erforderlich:

- *Fortsetzungsoperator* (z.B. *lineare Interpolation*) von V_{k-1} auf V_k und
- *Einschränkungsoperator* (z.B. *Projektion*) von V_k auf V_{k-1} .

Definition 7.2 (*interpolierender Operator, Projektor*)

Die *natürliche Injektion*

$$I_{k-1}^k : V_{k-1} \rightarrow V_k \quad \text{mit} \quad I_{k-1}^k v = v \quad \forall v \in V_{k-1} \subset V_k$$

heißt *Interpolationsoperator*.

Der entsprechende *Projektor* (gewichtete Restriktion)

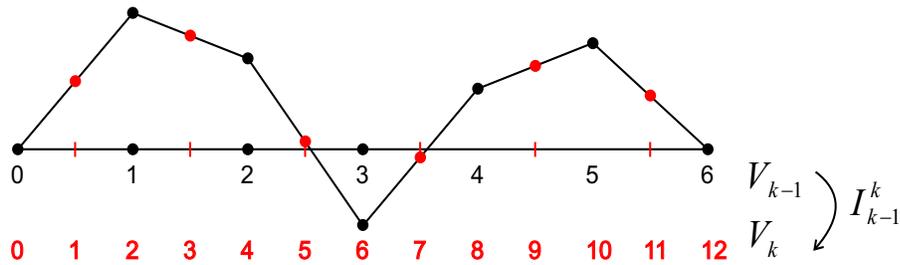
$$I_k^{k-1} : V_k \rightarrow V_{k-1}$$

ist *adjungiert* zu I_{k-1}^k bzgl. der Skalarprodukte in V_k, V_{k-1} (Bew: Übung):

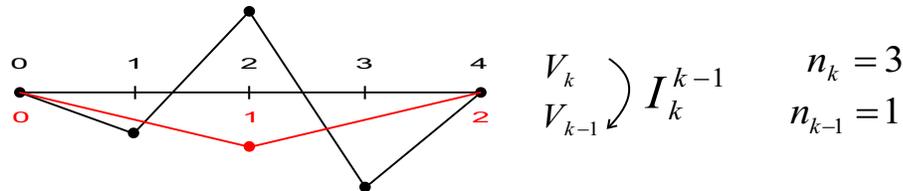
$$(I_k^{k-1} w, v)_{k-1} = (w, I_{k-1}^k v)_k = (w, v)_k \quad \forall v \in V_{k-1} \subset V_k, \quad \forall w \in V_k \quad (7.10)$$

Bsp (1D):

- 1) lin. Interpolation (funktioniert hier gut, da oszillatorischer Fehleranteil auf V_k ohnedies stark geglättet wird)



2) gewichtete Restriktion



$$(I_k^{k-1}w)_j = \frac{1}{4}(w_{2j-1} + 2w_{2j} + w_{2j+1}); \quad j = 1, \dots, n_{k-1} \text{ (innere Knoten)}$$

Klar: $(I_k^{k-1}w)_0 = (I_k^{k-1}w)_2 = 0$ (Randknoten)

(Alternative: *Injektion*: $(I_k^{k-1}w)_j = w_{2j}$)

2-Gitter Algorithmus (für Bsp. „einfache Iteration“):

Betrachte die (Operator-) Gleichung

$$A_k z_k = b_k, \quad k \dots \text{Gitterlevel (hier: } k = 1, 2)$$

Ziel: Lösung auf feinstem Gitter.

Ein *Iterationszyklus* besteht aus:

- 1) (Vor-)Glättung: (m_1 Schritte)

$$z_{k,l+1} = (I - \tau A_k)z_{k,l} + \tau b_k; \quad l = 0, \dots, m_1 - 1$$

(Startvektor $z_{k,0}$, $l \dots$ Iterationsindex)

- 2) Grobgitterkorrektur:

•

$$r_{k-1} := I_k^{k-1} \underbrace{(A_k z_{k,m_1} - b_k)}_{\text{Res. in } V_k} \dots \text{Residuum in } V_{k-1}$$

- Korrektur g_{k-1} in V_{k-1} als „Lösung“ (zB exakte Lösung für $k-1=1$) von:

$$A_{k-1}g_{k-1} = r_{k-1}$$

- Addieren der Korrektur in V_k :

$$z_{k,m_1+1} := z_{k,m_1} - I_{k-1}^k g_{k-1}$$

3) (Nach-)Glättung (m_2 Schritte):

$$z_{k,l+1} = \underbrace{(I - \tau A_k)}_{=T_k} z_{k,l} + \tau b_k; \quad l = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2$$

insgesamt:

$$z_{k,m_1+m_2+1} = \underbrace{T_k^{m_2}}_{(3)} \underbrace{(I - I_{k-1}^k A_{k-1}^{-1} I_k^{k-1} A_k)}_{(2)} \underbrace{T_k^{m_1}}_{(1)} z_{k,0} + \underbrace{\tilde{b}}_{\in V_k}$$

bzw. für Fehler: $e_{m_1+m_2+1} = T_k^{m_2} (I - I_{k-1}^k A_{k-1}^{-1} I_k^{k-1} A_k) T_k^{m_1} e_0$

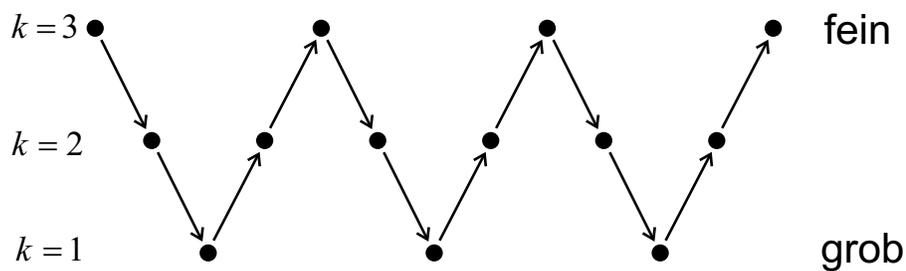
Bem:

- typisch sind $m_{1,2} = 1 - 3$
- Die Unterscheidung von Vor- und Nachglättung ist nur für Mehrgitteralgorithmen relevant.
- offene Frage: Wahl eines geeigneten Startvektors $z_{k,0} \rightarrow$ z.B. mit *Full-Multigrid-Algorithmus*.

Mehrgittervarianten

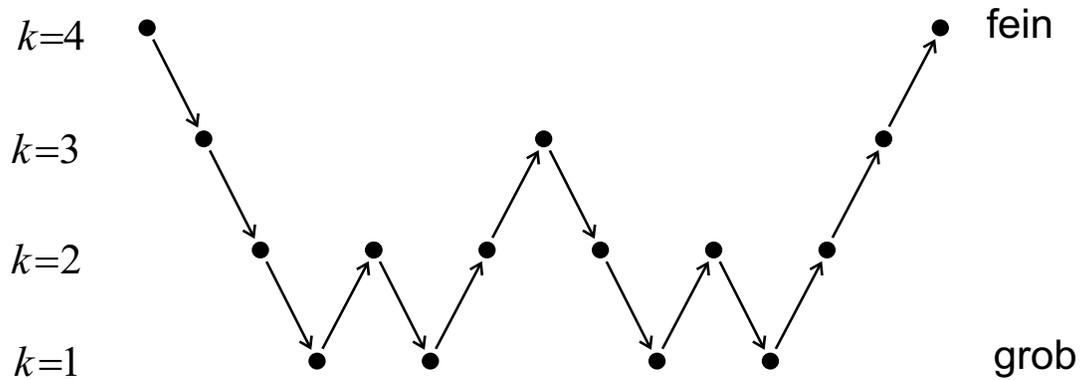
- obige Idee *rekursiv fortsetzen*, d.h. $A_{k-1}v_{k-1} = r_{k-1}$ wird durch MG gelöst (zB mit Startvektor $v_{k-1,0} = 0$, da Fehlerkorrektur)
- auf größtem Gitter $A_1v_1 = r_1$ direkt lösen

Bsp 1: V-Zyklus



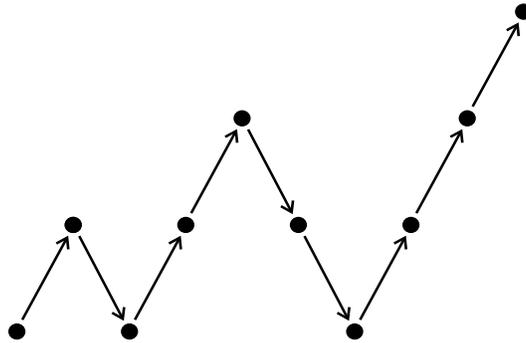
Motivation: Grobgitterkorrektur erzeugt wieder neue (geringfügige) hochfrequente Fehleranteile.

Bsp 2: W -Zyklus



Meist werden V -Zyklen verwendet, da schneller als W -Zyklen.

Bsp 3: „Full-Multigrid-Algorithmus“



exakte Lösung auf größtem Gitter, dann auf feinere Gitter fortsetzen.

rekursive Definition von V - und W -Zyklus

betrachte $A_k z_k = b =: r_k$ auf Gitterlevel k :

$k = 1$: direkte Lösung von $A_1 z = r_1$, also

$$MG(1, z_0, r_1) := A_1^{-1} r_1$$

- 1 Gitterlevel
- z_0 Startvektor (geht bei $k = 1$ nicht ein)
- r_1 Residuum / rechte Seite

$k > 1$: $MG(k, z_0, r_k)$ in 3 Schritten definiert:

1) Vorglättung:

$$z_{l+1} := T_k z_l + \tau r_k; \quad l = 0, \dots, m_1 - 1$$

2) Grobgitterkorrektur:

$$\begin{aligned} r_{k-1} &:= I_k^{k-1}(A_k z_{m_1} - r_k) \\ g_0 &:= 0 \quad (\text{Startwert } 0 \text{ für Iteration der Korrektur}) \\ g_i &:= MG(k-1, g_{i-1}, r_{k-1}); \quad i = 1, \dots, p \\ z_{m_1+1} &:= z_{m_1} - I_{k-1}^k g_p \quad \dots \text{Korrektur} \end{aligned}$$

$p = 1$... V-Zyklus

$p = 2$... W-Zyklus

3) Nachglättung:

$$z_{l+1} := T_k z_l + \tau r_k; \quad l = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2$$

$$\rightarrow MG(k, z_0, r_k) := z_{m_1+m_2+1}$$

Die nächsten Fragen sind:

- 1) die Konvergenztheorie von V- bzw. W-Zyklen.
- 2) die Abschätzung des numerischen Aufwands.

Definition 7.3 (*Orthogonalprojektor*)

P_k sei der Orthogonalprojektor $P_k : V \rightarrow V_k$ bzgl. $a(v, w)$, d.h.

$$\forall v \in V : P_k v \in V_k \text{ und } a(v - P_k v, w) = 0 \quad \forall w \in V_k \quad (7.11)$$

Der Operator P_{k-1} gibt einen Zusammenhang zwischen dem Fehler nach der Vorglättung in $V_k : z - z_{m_1}$ und der exakten Lösung der Korrekturgleichung mit dem Residuum in $V_{k-1} : A_{k-1} g = r_{k-1}$ mit $r_{k-1} = I_k^{k-1}(A_k z_{m_1} - r_k)$.

Lemma 7.3 (*Eigenschaft des Orthogonalprojektors*)

Es gilt: $g = -P_{k-1}(z - z_{m_1})$ mit $A_k z = r_k$.

Beweis:

Für alle $w \in V_{k-1}$ gilt

$$\begin{aligned}
 a(\underbrace{g}_{\in V_{k-1}}, w) &\stackrel{(7.8)}{=} (A_{k-1}g, w)_{k-1} = (r_{k-1}, w)_{k-1} \\
 &\stackrel{(7.10)}{=} (I_k^{k-1}(A_k z_{m_1} - r_k), w)_{k-1} = (A_k z_{m_1} - r_k, w)_k \dots [I_k^{k-1}, I_{k-1}^k \text{ sind adjungiert}] \\
 &= (A_k(z_{m_1} - z), w)_k = a(\underbrace{z_{m_1} - z}_{\in V_k}, w)
 \end{aligned}$$

und damit $g = -P_{k-1}(z - z_{m_1})$.

□

⇒ Wenn die Grobgittergleichung exakt gelöst wird, gilt für den Fehler nach der Grobgitterkorrektur:

$$\begin{aligned}
 z - z_{m_1+1} &= z - z_{m_1} + I_{k-1}^k g = (z - z_{m_1}) - \underbrace{I_{k-1}^k}_{\text{nat. Injektion}} P_{k-1}(z - z_{m_1}) \\
 &= (I - P_{k-1})(z - z_{m_1}).
 \end{aligned}$$

Es ist also wichtig, die *Eigenschaften des Restprojektors* $I - P_{k-1}$ zu studieren.

Lemma 7.4 *Es existiert eine positive Konstante c , so dass*

$$\|(I - P_{k-1})v\|_{E,k,0} \leq ch_k \|(I - P_{k-1})v\|_{E,k,1} \quad \forall v \in V_k$$

Beweis: → Übung.

Lemma 7.5 *Es existiert eine positive Konstante c , so dass*

$$\|(I - P_{k-1})v\|_{E,k,1} \leq ch_k \|v\|_{E,k,2} \quad \forall v \in V_k$$

Beweis:

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \|(I - P_{k-1})v\|_{E,k,1}^2 &= \|v - P_{k-1}v\|_E^2 = a(v - P_{k-1}v, v - \underbrace{P_{k-1}v}_{\in V_{k-1}}) \\
 &\stackrel{(7.11)}{=} a(v - P_{k-1}v, v) \\
 &\leq \|v - P_{k-1}v\|_{E,k,0} \cdot \|v\|_{E,k,2} \dots [\text{verallg. Cauchy-Schwarz, Lemma 7.2}] \\
 &\leq ch_k \|v - P_{k-1}v\|_{E,k,1} \|v\|_{E,k,2} \dots [\text{Lemma 7.4}]
 \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

□

7.5 Die Konvergenz des W-Zyklus

Wir betrachten jetzt den W-Zyklus mit $m_1 = m$ und $m_2 = 0$ Glättungsiterationen. Wir lösen die Gleichung $A_k z = r_k$ in V_k und bezeichnen den Fehler als $e_l = z_l - z$; $l = 0, 1, \dots, m+1$, wobei e_1, \dots, e_m durch die Glättung mit $T_k = I - \tau A_k$ und e_{m+1} durch die Grobgitterkorrektur entstehen:

$$e_m = T_k^m e_0.$$

Zuerst wird die Konvergenz der Zweigittermethode untersucht, d.h. die Gleichung auf V_{k-1} wird exakt gelöst:

Grogitterkorrektur:

$$\text{löse: } A_{k-1} g = r_{k-1} = I_k^{k-1} (A_k z_m - r_k)$$

$$\text{und } z_{m+1} := z_m - I_{k-1}^k g.$$

Der Fehler e_{m+1} erfüllt:

$$\begin{aligned} e_{m+1} &= z_{m+1} - z = \underbrace{z_m}_{\in V_k} - I_{k-1}^k \underbrace{g}_{\in V_{k-1}} = e_m - g \stackrel{\text{Lemma 7.3}}{=} e_m - P_{k-1} e_m \\ &= (I - P_{k-1}) e_m = (I - P_{k-1}) T_k^m e_0 \end{aligned}$$

Für $\|(I - P_{k-1})v\|$ haben wir bereits eine Abschätzung gewonnen (Lemma 7.5).

Lemma 7.6

Für hinreichend kleines τ (abhängig von h_k) gilt $\|T_k^m v\|_{E,k,2} \leq ch_k^{-1} m^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{E,k,1}$.

Bem:

- 1) Abschätzung ist für kleine h_k schlecht.
- 2) Es ist ein Regularisierungsergebnis und entspricht der Abschätzung

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}$$

für die Wärmeleitungsgleichung (7.6) mit $f = 0$.

Beweis:

Seien $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n_k}$ die Eigenwerte des (bezgl. $(\cdot, \cdot)_k$) symmetrischen und positiv definiten Operators A_k und ψ_i die Eigenfunktionen, die bzgl. $(\cdot, \cdot)_k$ orthonormal sind.

Für jede Funktion $v \in V_k$ gilt $v = \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i \psi_i$
 und damit $T_k^m v = \sum_{i=1}^{n_k} (1 - \tau \lambda_i)^m \alpha_i \psi_i$, $T_k^m = (I - \tau A_k)^m$

$$\begin{aligned} \|T_k^m v\|_{E,k,2}^2 &= \sum_{i=1}^{n_k} (1 - \tau \lambda_i)^{2m} \lambda_i^2 \alpha_i^2 = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{n_k} (1 - \tau \lambda_i)^{2m} (\tau \lambda_i) \lambda_i \alpha_i^2 \\ &\leq \frac{1}{\tau} \max_{\gamma_1 \leq \lambda \leq \gamma_2} (1 - \tau \lambda)^{2m} \tau \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i \alpha_i^2}_{= \|v\|_{E,k,1}^2 = (A_k v, v)_k} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Wahl von τ ?

1) Für $\tau < \frac{2}{\gamma_2}$ (Konvergenzbedingung der Methode der einfachen Iteration) gilt $0 < \tau \lambda < 2$.

Wir erhalten für $\tau \lambda \approx 2$: $(1 - \tau \lambda)^{2m} \tau \lambda \approx 2$ und damit *nicht* die gewünschte Abschätzung.

2) Für $0 < \underbrace{\tau \lambda}_{=\mu} < 1$, d.h. $\tau < \frac{1}{\gamma_2}$ gilt

$$\max_{0 < \mu < 1} (1 - \mu)^{2m} \mu = (1 - \mu)^{2m} \mu \Big|_{\mu = \frac{1}{2m+1}} = \left(\frac{2m}{2m+1} \right)^{2m} \cdot \frac{1}{2m+1} \leq \frac{1}{2} m^{-1}$$

Bem: $\lambda_{\min}(A_k) = O(1)$; $\lambda_{\max}(A_k) = O(h_k^{-2})$ (im Unterschied zu Galerkin-Matrix in (7.5))

Wählen wir $\tau = O(h_k^2)$, d.h. die hochfrequenten Anteile werden geglättet, so gilt $\tau^{-1} \leq c h_k^{-2}$ und damit die Behauptung

□

Folgerung: (Konvergenz der Zweigittermethode in energetischer Norm)

Die Zweigittermethode konvergiert in $\|\cdot\|_E$ mit einer von der Dimension n_k unabhängigen Rate. Für die Fehlerreduktion in *einem Zyklus* gilt:

$$\begin{aligned} \|e_{m+1}\|_E &= \|(I - P_{k-1})T_k^m e_0\|_E \stackrel{\text{Lemma 7.5}}{\leq} c_1 h_k \|T_k^m e_0\|_{E,k,2} \\ &\leq c_2 m^{-\frac{1}{2}} \|e_0\|_{E,k,1} = c_2 m^{-\frac{1}{2}} \|e_0\|_E \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Konvergenz, d.h. für genügend große m gilt $c_2 m^{-\frac{1}{2}} < 1$ und die Abbildung $(I - P_{k-1})T_k^m$ ist kontrahierend.

Die *Konvergenz der Multigrid-Methode* wird induktiv (über k) bewiesen.

Satz 7.1 Für alle $0 < \delta < 1$ gibt es $m = m(\delta)$, so dass

$$\|z - MG(k, z_0, r_k)\|_E \leq \delta \|z - z_0\|_E, \quad 1 \leq k \leq s$$

gilt.

Beweis:

Für $k = 1$ wird die Gleichung $A_1 z = r_1$ exakt gelöst.

Damit ist die linke Seite gleich Null und die Behauptung gilt.

Für $k > 0$ und $m \geq c_2^2/(\delta - \delta^2)^2$ gilt

$$\begin{aligned} z - MG(k, z_0, r_k) &= z - z_{m+1} = z - z_m + g_2 \text{ (W-Zyklus)} \\ &= z - z_m + g - g + g_2 = - \underbrace{e_{m+1}}_{\text{2-Gitter-Fehler}} - (g - g_2) \\ &\quad (g : \text{exakte 2-Gitter-Korrektur: } A_{k-1}g = r_{k-1}) \end{aligned}$$

und

$$\|z - MG(k, z_0, r_k)\|_E \leq \|e_{m+1}\|_E + \|g - g_2\|_E$$

lt. Ind.-Annahme (für $k - 1$):

$$A_{k-1}g = r_{k-1}$$

$$g_1 = MG(k - 1, g_0, r_{k-1})$$

$$g_2 = MG(k - 1, g_1, r_{k-1})$$

$$\Rightarrow \|g - g_2\|_E \leq \delta \|g - g_1\|_E \leq \delta^2 \|g - \underbrace{g_0}_{=0}\|_E$$

δ^2 : wichtig für Abschätzung, daher geht Bew. für V-Zyklus so nicht

$$\begin{aligned} &\leq c_2 m^{-\frac{1}{2}} \|e_0\|_E + \delta^2 \|g\|_E \\ \stackrel{\text{Lemma 7.3}}{=} &c_2 m^{-\frac{1}{2}} \|e_0\|_E + \delta^2 \|P_{k-1}(z - z_m)\|_E \\ &= c_2 m^{-\frac{1}{2}} \|e_0\|_E + \delta^2 \|P_{k-1} T_k^m e_0\|_E \\ \text{analog zu (7.12): } \left. \begin{array}{l} \|P_{k-1}\|_E \leq 1 \\ \|T_k\|_E = q_k < 1 \end{array} \right\} &\leq c_2 m^{-\frac{1}{2}} \|e_0\|_E + \delta^2 \cdot 1 \cdot q_k^m \|e_0\|_E \\ &\leq (c_2 m^{-\frac{1}{2}} + \delta^2) \|e_0\|_E \leq \delta \|e_0\|_E \end{aligned}$$

□

7.6 Die Konvergenz des V-Zyklus

Wir betrachten den *symmetrischen V-Zyklus*, d.h. $m_1 = m_2 = m$ und $p = 1$ und werden zunächst den Zusammenhang zwischen $z - z_0$ und $z - MG(k, z_0, r)$ feststellen:

Lemma 7.7 *Wenn die Vektoren $z, r \in V_k$ die Gleichung $A_k z = r$ erfüllen, dann gilt:*

$$E_k(z - z_0) = z - MG(k, z_0, r),$$

wobei der Fehleroperator E_k wie folgt rekursiv definiert ist:

$$\begin{aligned} E_1 &= 0 \\ E_k &= R_k^m(I - (I - E_{k-1})P_{k-1})R_k^m, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Beweis:

Das Lemma wird mit Hilfe der vollständigen Induktion bewiesen.

Für $k = 1$ ist die Behauptung offenbar.

Angenommen es gilt für $k - 1$ und $g \in V_{k-1}$ die exakte Lösung von $A_{k-1}g = \bar{r}$.

Nach der Grobgitterkorrektur erhalten wir $g_1 = MG(k - 1, 0, \bar{r})$ und wegen der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} g - g_1 &= E_{k-1}(g - 0) = E_{k-1}g \quad \text{und damit} \\ g_1 &= (I - E_{k-1})g = -(I - E_{k-1})P_{k-1}(z - z_m). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Darstellung erhalten wir:

$$\begin{aligned} z - MG(k, z_0, r) &= z - z_{2m+1} \\ &= R_k^m(z - z_{m+1}) = R_k^m(z - (z_m - g_1)) \\ &= R_k^m(z - z_m + (I - E_{k-1})R_{k-1}(z - z_m)) \\ &= R_k^m(I - (I - E_{k-1})P_{k-1}) \underbrace{(z - z_m)}_{=R_k^m(z-z_0)} \\ &= E_k(z - z_0) \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Lemma 7.8 *Der Operator R_k ist selbstadjungiert in $(\cdot, \cdot)_E = a(\cdot, \cdot)$*

Beweis:

Für $R_k = I - \tau A_k$ genügt es zu zeigen, dass A_k selbstadjungiert ist.

Die Definition von A_k ist $(A_k v, w)_k = a(v, w) \quad \forall v, w \in V_k$

Damit erhalten wir

$$a(A_k v, w) = a(w, A_k v) = (A_k w, A_k v)_k = (A_k v, A_k w)_k = a(v, A_k w)$$

□

Lemma 7.9 *Der Operator E_k ist selbstadjungiert in $(\cdot, \cdot)_E = a(\cdot, \cdot)$ und positiv semidefinit.*

Beweis:

Für $k = 1$ ist es trivial. Wenn E_{k-1} die Bed. erfüllt

$$\begin{aligned}
a(E_k v, w) &= a(R_k^m (I - (I - E_{k-1})P_{k-1})R_k^m v, w) \\
&= a((I - P_{k-1} + E_{k-1}P_{k-1})R_k^m v, R_k^m w) \\
&= a((I - P_{k-1})R_k^m v, R_k^m w) + a(E_{k-1}P_{k-1}R_k^m v, R_k^m w) \\
&= a(R_k^m v, (I - P_{k-1})R_k^m w) + a(\underbrace{E_{k-1}P_{k-1}R_k^m v}_{\in V_{k-1}}, R_k^m w) \\
&= a(R_k^m v, (I - P_{k-1})R_k^m w) + a(E_{k-1}P_{k-1}R_k^m v, P_{k-1}R_k^m w) \\
&= a(R_k^m v, (I - P_{k-1})R_k^m w) + a(P_{k-1}R_k^m v, E_{k-1}P_{k-1}R_k^m w) \\
&= a(R_k^m v, (I - P_{k-1} + E_{k-1}P_{k-1})R_k^m w) = a(v, E_k w)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a(E_k v, v) &= a((I - (I - E_{k-1})P_{k-1})R_k^m v, R_k^m v) \\
&= a(R_k^m v, R_k^m v) - a((I - E_{k-1})P_{k-1}R_k^m v, R_k^m v) \\
&= a(R_k^m v, R_k^m v) - a((I - E_{k-1})P_{k-1}R_k^m v, P_{k-1}R_k^m v) \\
&= a(R_k^m v, R_k^m v) - a(P_{k-1}R_k^m v, P_{k-1}R_k^m v) + a(E_{k-1}P_{k-1}R_k^m v, P_{k-1}R_k^m v) \\
&= a((I - P_{k-1})R_k^m v, R_k^m v) + a(E_{k-1}(P_{k-1}R_k^m v), P_{k-1}R_k^m v) \geq 0
\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

$$\begin{aligned}
P\text{-Projektor} &\Rightarrow (x, x) - (Px, Px) = ((I - P^2)x, x) \\
&= ((I - P)x, x) = (x^\perp, x) = (x^\perp, x^\perp) = ((I - P)x, (I - P)x) \geq 0
\end{aligned}$$

Lemma 7.10 *Die Eigenwerte des Operators E_k genügen den Ungleichungen*

$$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{n_k} \leq \frac{c}{c + m},$$

wobei c eine von k unabhängige Konstante ist.

Beweis:

Zuerst bemerken wir, dass alle EW von R_k kleiner als eins sind und damit $(R_k^j w, w)_k \geq (R_k^l w, w)_k$ für $l \geq j \geq 0$ gilt.

1) Dann beweisen wir die *erste Hilfsungleichung*:

$$a((I - R_k)R_k^{2m}v, v) \leq \frac{1}{2m}a((I - R_k^{2m})v, v) \quad (7.13)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a((I - R_k)R_k^l v, v) &= (A_k(I - R_k)R_k^l v, v)_k = \tau(A_k R_k^l v, A_k v)_k \\ &= \tau(R_k^l A_k v, A_k v)_k \leq \tau(R_k^j A_k v, A_k v)_k = a((I - R_k)R_k^j v, v) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} 2ma((I - R_k)R_k^{2m}v, v) &\leq a((I - R_k)v, v) + a((I - R_k)R_k v, v) + \dots \\ &\quad + a((I - R_k)R_k^{2m-1}v, v) \text{ (Teleskopsumme)} \\ &= a((I - R_k^{2m})v, v) \Rightarrow (7.13) \end{aligned}$$

2) die *zweite Hilfsungleichung* ist

$$\begin{aligned} a((I - P_{k-1})R_k^m v, (I - P_{k-1})R_k^m v) &=: \|(I - P_{k-1})R_k^m v\|_{E,k,1}^2 \leq c_1 h_k^2 \|R_k^m v\|_{E,k,2}^2 \quad (7.14) \\ &= c_1 h_k^2 (A_k^2 R_k^m v, R_k^m v)_k = c_1 h_k^2 a(A_k R_k^m v, R_k^m v), \quad A_k = \frac{1}{\tau}(I - R_k) \\ &= c_1 h_k^2 \frac{1}{\tau} a((I - R_k)R_k^m v, R_k^m v) \leq c_2 a((I - R_k)R_k^{2m}v, v) \stackrel{(7.13)}{\leq} \frac{c_3}{m} a((I - R_k^{2m})v, v) \end{aligned}$$

Für die Abschätzung der EW von E_k genügt es, eine obere Schranke von $a(E_k v, v)/a(v, v)$ zu finden.

Mit $\gamma = \frac{c_3}{c_3+m}$, d.h. $1 - \gamma = \frac{m}{c_3+m} \Rightarrow \gamma = (1 - \gamma) \frac{c_3}{m}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} a(E_k v, v) &= a(R_k^m v, R_k^m v) - a(\underbrace{P_{k-1}R_k^m v}_{\in V_{k-1}}, P_{k-1}R_k^m v) + a(\underbrace{E_k P_{k-1}R_k^m v}_{\in V_{k-1}}, P_{k-1}R_k^m v) \\ &\stackrel{l.V.}{\leq} a((I - P_{k-1})R_k^m v, (I - P_{k-1})R_k^m v) + \gamma a(P_{k-1}R_k^m v, P_{k-1}R_k^m v) \\ &= (1 - \gamma)a((I - P_{k-1})R_k^m v, (I - P_{k-1})R_k^m v) + \gamma a(R_k^m v, R_k^m v) \\ &\stackrel{(7.14)}{\leq} \underbrace{(1 - \gamma) \frac{c_3}{m}}_{=\gamma} a((I - R_k^{2m})v, v) + \gamma a(R_k^{2m}v, v) = \gamma a(v, v) \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma induktiv bewiesen. □

Satz 7.2 *Der V-Zyklus erfüllt*

$$\|z - MG(k, z_0, r)\|_E \leq \frac{c}{c+m} \|z - z_0\|_E,$$

wobei m die Anzahl der Glättungen bezeichnet.

Beweis:

Aus Lemma 7.7 folgt, dass

$$z - MG(k, z_0, r) = E_k(z - z_0)$$

Weiterhin gilt für alle $v \in V_k$ mit $v = \sum_{i=1}^{n_k} \beta_i \psi_i$, $E_k \psi_i = \alpha_i \psi_i$, $a(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$

$$\begin{aligned} \|E_k v\|_E^2 &= a(E_k v, E_k v) = a(E_k^2 v, v) \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^2 \beta_i^2 \\ &\stackrel{\text{Lemma}}{\leq} \left(\frac{c}{c+m}\right)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n_k} \beta_i^2}_{=\|v\|_E^2} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

7.7 Die Konvergenz der „Full-Multigrid“-Methode

Die „Full-Multigrid“-Methode ist

- 1) Löse $A_1 \hat{u}_1 = f_1$
- 2) Für $p = 2, \dots, k$

$$\begin{aligned} u_0^p &= I_{p-1}^p \hat{u}_{p-1} && \text{Anfangsnäherung} \\ u_{l+1}^p &= MG(p, u_l^p, f_p) && l = 0, \dots, s-1 \quad s \text{ MG-Iterationen} \\ \hat{u}_p &= u_s^p \end{aligned}$$

Satz 7.3 *Die „Full-Multigrid“-Methode ist konvergent für genügend große s und der Fehler genügt der „pseudo“-optimalen Abschätzung*

$$\|u_k - \hat{u}_k\|_E \leq c \cdot h_k \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Beweis:

Eine Iteration der Multigrid-Methode ist *kontrahierend*, d.h.

$$\begin{aligned} \|u_k - \hat{u}_k\|_E &\leq \gamma^s \|u_k - u_0^k\|_E = \gamma^s \|u_k - \hat{u}_{k-1}\|_E \\ &\leq \gamma^s (\|u_k - u_{k-1}\|_E + \|u_{k-1} - \hat{u}_{k-1}\|_E) \leq c\gamma^s (h_k \|u\|_{H^2(\Omega)} + \|u_{k-1} - \hat{u}_{k-1}\|_E) \end{aligned}$$

Wir haben benutzt:

$$\|u - u_k\|_E \leq c_1 h_k \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

und

$$\|u_k - u_{k-1}\|_E \leq \|u_k - u\|_E + \|u_{k-1} - u\|_E \leq 3c_1 h_k \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Für die Norm des Fehlers $\hat{e}_k := u_k - \hat{u}_k$ gilt damit die *rekursive Ungleichung*

$$\begin{aligned} \|\hat{e}_k\|_E &\leq c\gamma^s (h_k \|u\|_{H^2(\Omega)} + \|\hat{e}_{k-1}\|_E) \\ &\leq (c\gamma^s h_k + c^2\gamma^{2s} h_{k-1} + \dots + c^k \gamma^{ks} h_1) \|u\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq h_k \left(\sum_{j=1}^k (c\gamma^s)^j 2^{j-1} \right) \|u\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq h_k c\gamma^s \sum_{j=0}^{\infty} (2c\gamma^s)^j \|u\|_{H^2(\Omega)} = c_1 h_k \|u\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Dabei ist es notwendig, s so zu wählen, dass

$$2c\gamma^s < 1$$

gilt. Für c_1 ergibt sich

$$c_1 = \frac{c\gamma^s}{1 - 2c\gamma^s}$$

Der Satz ist bewiesen. □

7.8 Numerischer Aufwand

- Übergang von Gitter k auf $k - 1$ (in 2D):
 $\frac{1}{4}$ der Variablen, halbe Bandbreite in Systemmatrix
 \Rightarrow Aufwand der Cholesky-Zerlegung reduziert sich um Faktor 16.

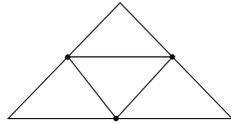
Die Dimension von V_k ist $n_k = \dim V_k$. s_k sei die Anzahl der inneren Dreiecksseiten und d_k die Anzahl der Dreiecke in der Triangulierung.

Es gilt die Euler-Formel $n_k = s_k - d_k + 1$ (\rightarrow Übung).

$$\begin{cases} s_k = 2s_{k-1} + 3d_{k-1} & (a) \\ d_k = 4d_{k-1} & (b) \end{cases} \quad (7.15)$$

sind die Differenzengleichungen, die die Verfeinerung beschreiben.

Bsp:



$$\begin{aligned} d_{k-1} &= 1, & s_{k-1} &= 0 \\ d_k &= 4, & s_k &= 3 \end{aligned}$$

Es gilt $d_{k-1} = 4^{k-2}d_1$, und $s_k = \frac{3}{8}d_14^k$ ist eine spezielle Lösung von (a).

Die allgemeine Lösung der Gleichung $s_k = 2s_{k-1}$ lautet $s_k = c \cdot 2^k$.

Anpassung an die Anfangsbedingung (für $k = 1$) liefert Lösung von (7.15):

$$\begin{cases} s_k = \left(\frac{1}{2}s_1 - \frac{3}{4}d_1\right)2^k + \frac{3}{8}d_14^k \\ d_k = \frac{1}{4}d_1 \cdot 4^k \end{cases}$$

Damit gilt asymptotisch für $k \rightarrow \infty$:

$$\underline{c}d_14^k \leq n_k \leq \bar{c}d_14^k$$

Satz 7.4 Die Anzahl der arithmetischen Operationen für V- bzw. W-Zyklus-Methode ist $Op(k) = O(n_k)$

„Beweis“:

- Aufwand von I_k^{k-1}, I_{k-1}^k wird hier vernachlässigt; könnte bis zu 15-20% ausmachen.

Es gilt

$$\begin{aligned} Op(k) &= mc_1n_k + p \cdot Op(k-1) \\ &\leq c_1mn_k + p \cdot c_1 \cdot m \cdot n_{k-1} + \dots + p^{k-1}c_1 \cdot m \cdot n_1 \end{aligned}$$

mit

m	...	Anzahl der Glättungsschritte
c_1n_k	...	Aufwand einer Iteration + Residuum
p	...	1 oder 2

c_1 muss so (groß) gewählt werden, dass auch $g_1 = A_1^{-1}r_1$ mit weniger als $c_1 m n_1$ Operationen berechnet werden kann.

$$\begin{aligned} \Rightarrow Op(k) &\leq c_1 m \bar{c} d_1 4^k \left[\underbrace{1 + \frac{p}{4} + \dots + \left(\frac{p}{4}\right)^{k-1}}_{\leq \frac{1}{1-\frac{p}{4}}} \right] \\ &\leq c_2 \frac{4^k}{1 - \frac{p}{4}} \\ &\leq c_3 n_k \text{ mit } c_3 = \frac{\bar{c}}{\underline{c}} c_1 d_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{p}{4}} \cdot m \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Die „Full-Multigrid“-Methode besitzt dieselbe Komplexität

Ref: [Bra] § V, [Bri], [GR] § 5.3, 5.6, [KA] S. 241-243.

8 Randelementmethoden (BEM)

8.1 Einleitung

Neben der Methode der Finiten Elemente (FEM) spielen zur numerischen Lösung von Problemen aus der Festkörper- und Strömungsmechanik sowie der Wärmelehre die Randelementmethoden („boundary element method“ = BEM) eine zunehmend größere Rolle.

Die FEM basiert auf der Variationsformulierung und ist allgemein (d.h. für lineare, nicht-lineare, zeitabhängige usw.) Probleme anwendbar.

Trotzdem gibt es bei der Anwendung von FEM Probleme:

- 1) Das ganze Gebiet Ω wird diskretisiert (3D!!)
- 2) Das Computerprogramm ist gewöhnlich lang und kompliziert.
- 3) Für unbeschränkte Gebiete Ω werden künstliche RBen gebraucht und produzieren oft einen zusätzlichen Fehler.
- 4) Die bequemen stückweise linearen Elemente können nicht für DGLen höherer Ordnung (≥ 4) benutzt werden.
- 5) Die Genauigkeit bei der Bestimmung der Ableitungen der Lösung (Kräfte, Spannungen, Flüsse, usw.) ist deutlich niedriger als bei der Lösung selbst.

Bei der BEM wird aus der PDGI (in d Dimensionen) unter Verwendung einer Fundamentallösung und RB im 1. Schritt eine *Randintegralgleichung* (auf einer $d-1$ dim. Oberfläche) konstruiert.

2. Schritt: Diskretisieren dieser Integralgleichung, z.B. als endlichdimensionale Variationsformulierung; Zerlegung des Randes in „Randelemente“.

Vorteile von BEM:

- 1) Das Problem wird um *eine Raumdimension reduziert*.
- 2) Die Diskretisierung ist wesentlich einfacher als bei FEM (in 3D).
- 3) Das Computerprogramm (einfachste Realisierung) ist relativ kurz und einfach zu entwickeln.

- 4) Die unbeschränkten Gebiete (z.B. *Außenraumprobleme* für elektrische Felder) bereiten keine Probleme; das Computerprogramm wird nur unwesentlich verändert.
- 5) Die Berechnung der Ableitungen der Lösung erfolgt mit der gleichen Genauigkeit
- 6) Es besteht die Möglichkeit, die Lösung in (einigen) ausgewählten Punkten oder Teilbereichen zu bestimmen.
- 7) Natürliche Behandlung von Randsingularitäten (Risse)

Nachteile von BEM:

Nur für lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten, da die explizite Form der Fundameltallösung benötigt wird.

Außenraumprobleme

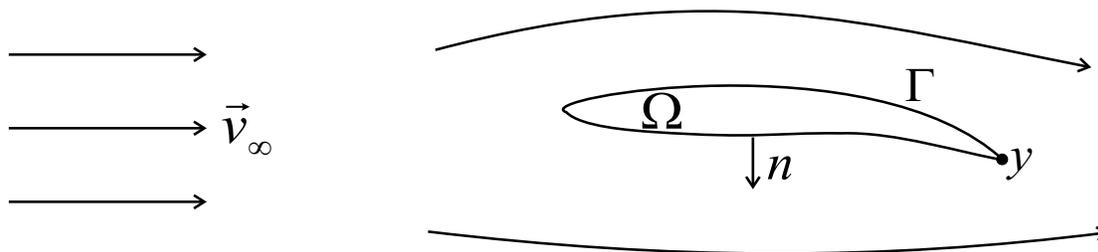
Beispiel 8.1

Stationäre, divergenz- und rotationsfreie Strömung in 2D.

Umströmung eines „Körpers“ Ω (beschränkt) mit Profil $\Gamma = \partial\Omega$, Außenraum $\Omega^c = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$

ges: Geschwindigkeitsfeld

$$v(x) = (v_1, v_2)^T \text{ mit } v \cdot n_\Gamma = 0 \tag{8.1}$$



Modell:

$$v(x) = \begin{pmatrix} v_\infty \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \nabla U(x) \quad \text{in } \Omega^c$$

λ ... Zirkulation – oft so gewählt, dass an y keine „Wirbel“ entstehen.

$0 \in \Omega \Rightarrow v(x)$ nicht singular in Ω^c

gesuchtes *Geschwindigkeitspotential* $U(x)$ erfüllt äußeres Neumann Problem:

$$\Delta U = 0, \Omega^c$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = g(x) := -v_\infty n_1(x) - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{|x|^2} (x_1 n_2(x) - x_2 n_1(x)), x \in \Gamma \text{ (aus (8.1))}$$

Abklingbedingung: $U(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ für $|x| \rightarrow \infty$

Beispiel 8.2

akustisches Streuproblem einer einfallenden, zeit-harmonischen Welle $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ an der Oberfläche $\Gamma = \partial\Omega$.

Modell: Helmholtz Gleichung

$$(\Delta + k^2)U = 0 \quad \text{in } \Omega^c \subset \mathbb{R}^3$$

$$k = |\vec{k}| \geq 0; U \in \mathbb{C} \dots \text{ akustischer Druck}$$

2 mögliche Randbedingungen:

$$1) \text{ „weich“ (zB Wasser-Luft-Interface): } U \Big|_\Gamma = 0$$

$$2) \text{ „hart“ (zB Luft-Festkörper-Interface): } \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0$$

für $|x| \rightarrow \infty$: $U(x) \approx e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

sichergestellt durch *Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingungen*:

$$U(x) - e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad \text{für } r = |x| \rightarrow \infty$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right) \left(U - e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad \text{für } r = |x| \rightarrow \infty$$

Die Green'sche Funktion von $\Delta + k^2$ in \mathbb{R}^3 , $u^*(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$, erfüllt die Ausstrahlungsbedingungen (ohne $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ -Term).

8.2 BEM für 1D-Modellaufgabe

Wir betrachten die Aufgabe

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & , \quad 0 < x < 1 \quad (\Omega = (0, 1)) \\ \alpha_0 u_0 + \beta_0 v_0 = \mu_0 & , \quad x = 0 \\ \alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1 = \mu_1 & , \quad x = 1 \end{cases} \quad (8.2)$$

wobei $u_0 = u(0)$, $u_1 = u(1)$, $v_0 = u'(0)$, $v_1 = u'(1)$ bezeichnet.

Eine Fundamentallösung ist

$$u^*(x, y) = \frac{1}{2}(1 - |x - y|), \quad x, y \in [0, 1];$$

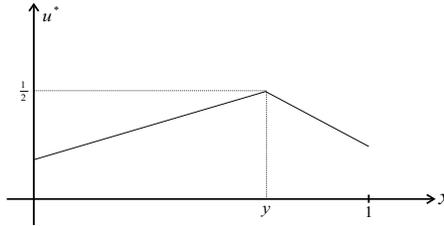
sie erfüllt (distributionell)

$$-\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}(x, y) = \delta_y(x) = \delta(x - y), \quad (8.3)$$

wobei $\delta(x)$ die *Dirac-Delta-Funktion* bezeichnet.

Für diese Funktion gilt

$$u^*(0, y) = \frac{1-y}{2}, \quad u^*(1, y) = \frac{y}{2}, \quad \frac{\partial u^*}{\partial x}(0, y) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial u^*}{\partial x}(1, y) = -\frac{1}{2}$$



Bem: Wir verwenden nicht die Green'sche Funktion, da diese für allgemeine Gebiete in 2D, 3D nicht explizit bekannt ist.

Wir multiplizieren die Gleichung $-u''(x) = f(x)$ mit $u^*(x, y)$ und integrieren bzgl. $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 f(x) u^*(x, y) dx &= \int_0^1 u''(x) u^*(x, y) dx \\ &= u'(x) u^*(x, y) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u'(x) \frac{\partial u^*}{\partial x}(x, y) dx \\ &= \left[u'(x) u^*(x, y) - u(x) \frac{\partial u^*}{\partial x}(x, y) \right] \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 u(x) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}(x, y) dx \end{aligned}$$

Mit (8.3) erhalten wir die sog. *Darstellungsformel*:

$$u(y) = \frac{1}{2}v_1y - \frac{1-y}{2}v_0 + \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_0 + \int_0^1 f(x)u^*(x,y) dx, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (8.4)$$

Damit ist es möglich, die Lösung $u(y)$, $y \in (0,1)$ zu berechnen, falls die Randwerte v_0, v_1, u_0, u_1 (Cauchy-Daten) zur Verfügung stehen.

Die RB geben uns zwei Gleichungen für diese Werte.

Für $y = 0$ und $y = 1$ erhalten wir aus (8.4) zusätzlich:

$$u_0 = -\frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_0 + f_0, \quad f_0 = \int_0^1 f(x)u^*(x,0) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)(1-x) dx$$

$$u_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_0 + f_1, \quad f_1 = \int_0^1 f(x)u^*(x,1) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)x dx$$

oder

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}v_0 &= -f_0 \\ \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}v_1 &= -f_1 \end{cases}$$

Zusammen mit den RB erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \alpha_0 & 0 & \beta_0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_0 \\ -f_1 \\ \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw. } Az = b.$$

Das ist eine Rand,,integral"formulierung von (8.2). Der Rand des Gebietes $(0,1)$ besteht nur aus zwei Punkten ($x = 0, x = 1$) und ist damit schon „diskret“.

Damit ist die Aufgabe gelöst:

- 1) Berechne f_0, f_1
- 2) Löse $Az = b \rightarrow u_0, u_1, v_0, v_1$
- 3) Berechne $u(y)$ aus (8.4) und u' aus:

$$u'(y) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{2} \int_0^y f(x) dx + \frac{1}{2} \int_y^1 f(x) dx, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

8.3 Formulierung von Randintegralgleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ ein beschränktes Gebiet und $\Gamma = \partial\Omega$ glatt. Die klassischen RWPe für die *Poisson-Gleichung* sind

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & , \quad x \in \Omega \\ u(x) = \mu(x) & , \quad x \in \Gamma \end{cases} \quad (\text{Dirichlet-Problem})$$

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & , \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n_x}(x) = \mu(x) & , \quad x \in \Gamma \end{cases} \quad (\text{Neumann-Problem})$$

oder ein *gemischtes Problem*:

$$u(x) = \mu_1(x), \quad x \in \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n_x}(x) = \mu_2(x), \quad x \in \Gamma_N \quad \Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma.$$

Die *zweite Green'sche Formel* lautet:

$$\int_{\Omega} u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x) \, dx = \int_{\Gamma} \left(u(x)\frac{\partial v}{\partial n_x} - v(x)\frac{\partial u}{\partial n_x} \right) dS_x$$

Sei $v(x) = u^*(x, y)$ *Fundamentallösung* von $-\Delta$, d.h. $-\Delta_x u^*(x, y) = \delta(x - y)$:

$$u^*(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y| & \text{im } \mathbb{R}^2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} & \text{im } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

\Rightarrow *dritte Green'sche Formel*:

$$\sigma(y)u(y) = \int_{\Gamma} \left(u^*(x, y)\frac{\partial u}{\partial n_x}(x) - \frac{\partial u^*}{\partial n_x}(x, y)u(x) \right) dS_x - \int_{\Omega} u^*(x, y)\Delta u(x) \, dx,$$

wobei

$$\sigma(y) = \begin{cases} 1 & , \quad y \in \Omega \\ \frac{1}{2} & , \quad y \in \Gamma \\ 0 & , \quad \text{sonst (da } \Delta_x u^*(x, y) \equiv 0 \text{ für } x \in \Omega, y \in \Omega^c). \end{cases}$$

Bem: Für $y \in \Gamma$ ist $\int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n_x} u dS_x$ hier und in (8.6) als *Cauchy'scher Hauptwert* zu verstehen.

Die (Green'sche) *Darstellungsformel* lautet damit (vgl. (8.4) für 1D-Fall):

$$u(y) = \int_{\Gamma} \left(u^*(x, y)\frac{\partial u}{\partial n_x}(x) - \frac{\partial u^*}{\partial n_x}(x, y)u(x) \right) dS_x + \int_{\Omega} u^*(x, y)f(x) \, dx, \quad y \in \Omega \quad (8.5)$$

Die beiden *Randfunktionen* $u(x)$, $\frac{\partial u}{\partial n_x}(x)$, $x \in \Gamma$ werden dabei benötigt. Die RB ist eine der Randfunktionen.

Für $y \in \Gamma$ erhalten wir die andere aus:

$$\frac{1}{2}u(y) = \underbrace{\int_{\Gamma} u^*(x, y) \frac{\partial u}{\partial n_x}(x) dS_x}_{=: (A_1 \frac{\partial u}{\partial n_x})(y)} - \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n_x}(x, y) u(x) dS_x}_{=: (Bu)(y)} + \int_{\Omega} u^*(x, y) f(x) dx, \quad y \in \Gamma \quad (8.6)$$

Das ist eine *Randintegralgleichung* für $u|_{\Gamma}$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma}$.

Für die *Dirichlet-Aufgabe* (d.h. $u|_{\Gamma}$ gegeben) ergibt sich eine *Integralgleichung erster Art*:

$$\left(A_1 \left(\frac{\partial u}{\partial n_x} \right) \right) (y) = \frac{1}{2}u(y) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n_x}(x, y) u(x) dS_x - \int_{\Omega} u^*(x, y) f(x) dx, \quad y \in \Gamma$$

mit dem Integraloperator A_1 .

Analog gilt für die *Neumann-Aufgabe* eine *Integralgleichung zweiter Art*:

$$\left(\left(\frac{1}{2}I + B \right) u \right) (y) = \left(A_1 \frac{\partial u}{\partial n_x} \right) (y) + \int_{\Omega} u^*(x, y) f(x) dx, \quad y \in \Gamma.$$

Damit entsteht die Notwendigkeit, zuerst eine Randintegralgleichung zu lösen. Danach kann die Darstellungsformel für u benutzt werden.

8.4 Die hypersinguläre Gleichung im \mathbb{R}^2

Ziel: alternative Randintegralgleichung zu (8.6)

Lemma 8.1 *Sei u harmonisch auf Ω (d.h. $\Delta u(x) = 0$) und Γ glatt. Dann gilt die hypersinguläre Gleichung:*

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n_y}(x, y) \frac{\partial u}{\partial n_x}(x) dS_x - \int_{\Gamma} (u(x) - u(y)) \frac{\partial^2 u^*}{\partial n_x \partial n_y}(x, y) dS_x \quad (8.7)$$

Beweis:

Sei $y \in \Gamma$ ein fixierter Punkt und n_y die entsprechende *Außennormale*, $|n_y| = 1$.

Wir betrachten die folgenden zwei Funktionen für die *zweite Green'sche Formel*

$$\tilde{u}(x) = u(x) - u(y)$$

und

$$\tilde{v}(x) = (\nabla_x u^*(x, y), n_y) = \frac{\partial u^*}{\partial n_y} \quad (\text{singulär an } x = y)$$

Offenbar gilt: $\Delta \tilde{v} = 0$, $x \neq y$.

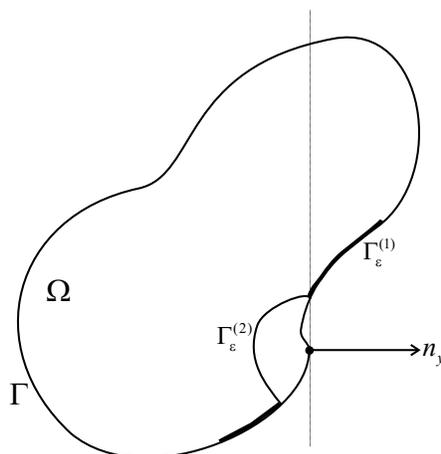
Die zweite Green'sche Formel kann nicht in Ω angewendet werden, aber in $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(y)$, $\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon^{(1)} \cup \Gamma_\varepsilon^{(2)} = \Gamma_\varepsilon$

Es gilt in Ω_ε :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\tilde{u}\Delta\tilde{v} - \tilde{v}\Delta\tilde{u}) dx = \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\tilde{u}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial n_x} - \tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n_x} \right) dS_x$$

und mit $\Delta\tilde{v}(x) = 0$, $x \in \Omega_\varepsilon$ erhalten wir

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} \tilde{v}\Delta\tilde{u} dx = \int_{\Gamma_\varepsilon^{(1)}} \left(\tilde{u}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial n_x} - \tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n_x} \right) dS_x + \int_{\Gamma_\varepsilon^{(2)}} \left(\tilde{u}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial n_x} - \tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n_x} \right) dS_x \quad (8.8)$$



Wichtig ist die Berechnung des Integrals über $\Gamma_\varepsilon^{(2)}$:

In *Polarkoordinaten* ergibt sich:

$$x \in \Gamma_\varepsilon^{(2)} : x = y + \varepsilon \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = y + \varepsilon e(\varphi), \quad \varphi_1(\varepsilon) \leq \varphi \leq \varphi_2(\varepsilon)$$

mit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_1(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_2(\varepsilon) = \pi$$

Für die Normale n_x , $x \in \Gamma_\varepsilon^{(2)}$ gilt: $n_x = -e(\varphi)$.

Die Taylor-Formel für $\tilde{u}(x)$, $\tilde{v}(x)$ ergibt:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &:= u(x) - u(y) = \varepsilon(\nabla_x u(y), e(\varphi)) + O(\varepsilon^2) \\ \tilde{v}(x) &:= (\nabla_x u^*(x, y), n_y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x - y, n_y)}{|x - y|^2} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} (e(\varphi), n_y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n_x} &= -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varepsilon} = -(\nabla_x u(y), e(\varphi)) + O(\varepsilon) \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n_x} &= -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon^2}(e(\varphi), n_y).\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_\varepsilon^{(2)}} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n_x} dS_x &= \int_{\varphi_2(\varepsilon)}^{\varphi_1(\varepsilon)} \left(\varepsilon(\nabla_x u(y), e(\varphi)) + O(\varepsilon^2) \right) \left(-\frac{1}{2\pi\varepsilon^2}(e(\varphi), n_y) \right) \underbrace{\varepsilon d\varphi}_{=dS_x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(\varepsilon)} (\nabla_x u(y), e(\varphi))(e(\varphi), n_y) d\varphi + O(\varepsilon)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}- \int_{\Gamma_\varepsilon^{(2)}} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n_x} dS_x &= - \int_{\varphi_2(\varepsilon)}^{\varphi_1(\varepsilon)} \left(-\frac{1}{2\pi\varepsilon}(e(\varphi), n_y) \right) \left(-(\nabla_x u(y), e(\varphi)) + O(\varepsilon) \right) \varepsilon d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(\varepsilon)} (e(\varphi), n_y)(\nabla_x u(y), e(\varphi)) d\varphi + O(\varepsilon)\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$, d.h. $x \rightarrow y$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^{(2)}} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n_x} - \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n_x} \right) dS_x &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\nabla_x u(y), e(\varphi))(e(\varphi), n_y) d\varphi \\ &= \frac{1}{2}(\nabla u(y), n_y) = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial n_y}(y)\end{aligned}\tag{8.9}$$

wobei die Eigenschaft (\Rightarrow Übung)

$$\int_0^\pi (a, e(\varphi))(b, e(\varphi)) d\varphi = \frac{\pi}{2}(a, b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^2$$

benutzt wurde.

Aus (8.8), (8.9) und $\Delta \tilde{u}(x) = 0$ folgt dann (8.7).

□

8.5 Calderón-Projektor und Poincaré-Steklov-Operator

Wir benutzen jetzt die folgenden *Operatorbezeichnungen*:

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \frac{\partial u}{\partial n_x}(x) && \text{(Normalableitung)} \\
 (A_1 v)(y) &= \int_{\Gamma} u^*(x, y) v(x) dS_x && \text{(Einfachschichtpotential)} \\
 (B u)(y) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n_x}(x, y) u(x) dS_x && \text{(Doppelschichtpotential)} \\
 (B^* v)(y) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n_y}(x, y) v(x) dS_x && \text{(adjungierter Operator von } B) \\
 (A_2 u)(y) &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u^*}{\partial n_x \partial n_y}(x, y) (u(x) - u(y)) dS_x && \text{(hypersingulärer Operator)}
 \end{aligned}$$

Die Randintegralgleichungen (8.6), (8.7) können damit für $\Delta u = 0$ in *Operatorform* geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} u(y) &= -(B u)(y) + (A_1 v)(y) \\
 \frac{1}{2} v(y) &= (B^* v)(y) + (A_2 u)(y)
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} -(\frac{1}{2}I + B) & A_1 \\ A_2 & -(\frac{1}{2}I - B^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - B & A_1 \\ A_2 & \frac{1}{2}I + B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

Der Vektor $(u(x), \frac{\partial u}{\partial n_x}(x))^T$ heißt „*Cauchy-Daten*“ des Randwertproblems.

Definition 8.1 (*Calderón-Projektor*)

Der Operator

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - B & A_1 \\ A_2 & \frac{1}{2}I + B^* \end{pmatrix}$$

heißt Calderón-Projektor.

Wenn A_1 invertierbar ist, ergibt sich aus (8.10) für $v(x)$:

$$v = A_1^{-1}(\frac{1}{2}I + B)u := Su \quad (8.12)$$

Definition 8.2 (Poincaré-Steklov-Operator)

Der Operator S , der die Dirichlet-RB auf die Neumann-RB abbildet, heißt Poincaré-Steklov-Operator.

Für S gibt es eine bzgl. $L^2(\Gamma)$ symmetrische Darstellung:

$$v = Su \stackrel{(8.11)}{=} A_2 u + \left(\frac{1}{2}I + B^*\right)v \stackrel{(8.12)}{=} \left[A_2 + \left(\frac{1}{2}I + B^*\right)A_1^{-1}\left(\frac{1}{2}I + B\right) \right] u$$

Die Eigenschaften der Operatoren A_1, B, B^* und A_2 bestimmen später die Wahl der numerischen Verfahren sowie die Konvergenzeigenschaften.

8.6 Die Methode der (naiven) Kollokation in 2D

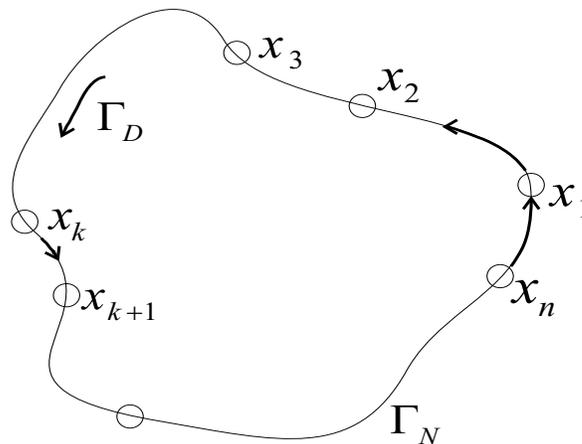
Die Aufgabe

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & , \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x) = g_1(x) & , \quad x \in \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n_x}(x) = g_2(x) & , \quad x \in \Gamma_N \end{cases} \quad \Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$$

Bem: hier nur *homogene Gleichung*, da in (8.6) sonst noch ein (numerisch aufwendigeres) Volumenintegral auftritt.

Die *Diskretisierung des Randes* ist

$$x_1, \dots, x_n \in \Gamma : \quad x_1, \dots, x_k \in \Gamma_D, \quad x_{k+1}, \dots, x_n \in \Gamma_N$$



Wir bezeichnen: $x_{n+1} \equiv x_1$

Der Rand Γ wird durch den *Polygonzug* $\Gamma_h = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ ersetzt:

$$\Gamma_h = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j,$$

$$\Gamma_j = \{x : x = x_j + t(x_{j+1} - x_j), 0 \leq t < 1\}$$

$$h_j = |x_{j+1} - x_j|.$$

Wir benutzen die *stückweise konstanten Ansatzfunktionen* für $u(x)$ und $v(x)$ (Alternativen wären: stückweise linear, quadratisch, ...):

$$u_h(x) = u_j, \quad x \in \Gamma_j, \quad v_h(x) = v_j, \quad x \in \Gamma_j$$

Die Zahlen u_1, \dots, u_k und v_{k+1}, \dots, v_n sind aus der RB bekannt:

$$u_j = \frac{1}{2} \left(g_1(x_{j+1}) + g_1(x_j) \right), \quad j = 1, \dots, k-1; \quad u_k = g_1(x_k)$$

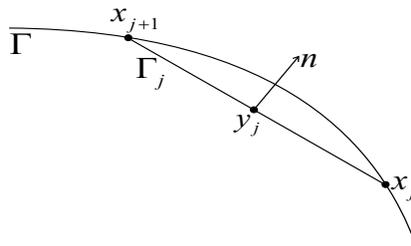
$$v_j = \frac{1}{2} \left(g_2(x_{j+1}) + g_2(x_j) \right), \quad j = k+1, \dots, n-1; \quad v_n = g_2(x_n).$$

Die *Randintegralgleichung* (8.6)

$$\frac{1}{2}u(y) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n_x}(x, y) u(x) dS_x + \int_{\Gamma} u^*(x, y) v(x) dS_x$$

kann nicht mit $u_h(x), v_h(x)$ erfüllt werden ($\forall y \in \Gamma$).

Die *Idee der Kollokation* besteht darin, diese Gleichung in *Kollokationspunkten* exakt zu erfüllen:



$$y_i = \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{1}{2}u_i = - \sum_{j=1}^n u_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial n_x}(x, y_i) dS_x + \sum_{j=1}^n v_j \int_{\Gamma_j} u^*(x, y_i) dS_x, \quad i = 1, \dots, n \quad (8.13)$$

oder in der *Matrixform*

$$\frac{1}{2}u = -Bu + Av, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad u, v \in \mathbb{R}^n$$

mit

$$b_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial n_x}(x, y_i) dS_x, \quad a_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^*(x, y_i) dS_x$$

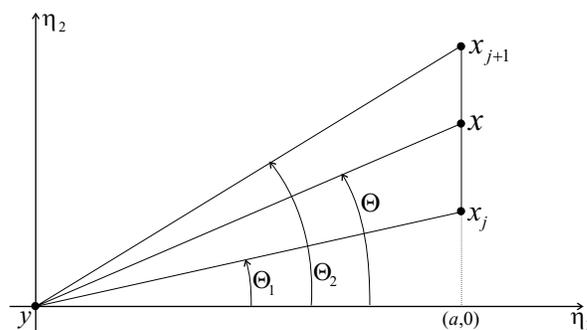
Die letzte Gleichung lautet $\tilde{B}u = Av$ für $\tilde{B} := \frac{1}{2}I + B$.

Es gilt: $u = (u_D^T, u_N^T)^T$ mit $u_D \in \mathbb{R}^k$ bekannt und $u_N \in \mathbb{R}^{n-k}$ unbekannt;
und $v = (v_D^T, v_N^T)^T$ mit $v_D \in \mathbb{R}^k$ unbekannt und $v_N \in \mathbb{R}^{n-k}$ bekannt.

$$\begin{pmatrix} B_D & B_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_D \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_D & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_D \\ v_N \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} A_D & -B_N \end{pmatrix}}_{=C} \begin{pmatrix} v_D \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_D & -A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_D \\ v_N \end{pmatrix}$$

$C = (A_D; -B_N)$: i.A. keine spezielle Struktur, vollbesetzt (im Gegensatz zu FEM!) \Rightarrow Gleichungssystem meist mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren lösen.

Die Elemente a_{ij} und b_{ij} können analytisch (exakt) wie folgt berechnet werden:
Sei $y \in \mathbb{R}^2$ der Koordinatenursprung für $\eta_1 \times \eta_2$, wobei die η_2 -Achse wie $\overrightarrow{x_j x_{j+1}}$ gerichtet ist.



Es gilt: $|x - y| = \frac{a}{\cos \theta}$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ (siehe Skizze)

$$dS_x = d\eta_2 = d(a \tan \theta) = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (= a(1 + \tan^2 \theta) d\theta)$$

1) Damit erhalten wir für a_{ij} :

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma_j} u^*(x, y) dS_x &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \ln |x - y| dS_x = -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\ln \frac{a}{\cos \theta} \right) \cdot \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \\
&= -\frac{a}{2\pi} \left(\tan \theta \ln \frac{a}{\cos \theta} \right) \Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} + \frac{a}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta}{a} \cdot \frac{-a}{\cos^2 \theta} \cdot (-\sin \theta) \cdot \tan \theta d\theta \\
&= -\frac{a}{2\pi} \left(\tan \theta \cdot \ln \frac{a}{\cos \theta} \right) \Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} + \frac{a}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan^2 \theta d\theta \\
&= -\frac{a}{2\pi} \left(\tan \theta \cdot \ln \frac{a}{\cos \theta} - \tan \theta + \theta \right) \Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \\
&\stackrel{\text{Subst.}}{=} -\frac{\rho}{2\pi} (\sin \theta \cdot (\ln \rho - 1) + \theta \cos \theta) \Big|_{\rho(y, x_j), \theta_1}^{\rho(y, x_{j+1}), \theta_2}
\end{aligned}$$

wobei $\rho := \frac{a}{\cos \theta} = |x - y|$ bezeichnet.

a) Damit gilt für a_{ij} , $i \neq j$:

$$a_{ij} = -\frac{\rho}{2\pi} [\sin \theta \cdot (\ln \rho - 1) + \theta \cos \theta] \Big|_{\rho(y_i, x_j), \theta_1}^{\rho(y_i, x_{j+1}), \theta_2}$$

b) und wenn $y \rightarrow y_i$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \rho &= \frac{h_i}{2}, \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} \\
a_{ii} &= -\frac{h_i}{2\pi} \left(\ln \frac{h_i}{2} - 1 \right), \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

2) Für $\tilde{b}_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} + b_{ij}$ erhalten wir:

a)

$$\begin{aligned}
b_{ij} = \tilde{b}_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial n_x}(x, y_i) dS_x = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{(x - y_i, n_x)}{|x - y_i|^2} dS_x \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\left(\begin{pmatrix} a \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}{a^2} \cdot \cos^2 \theta \underbrace{\frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta}_{=dS_x} \\
&= -\frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1), \quad i \neq j
\end{aligned}$$

b) Für $i = j$ gilt:

$$y_i \in \Gamma_i \Rightarrow x - y_i \perp n_x \Rightarrow b_{ii} = 0, \tilde{b}_{ii} = \frac{1}{2}$$

Bem:

$$\sum_{j=1}^n \tilde{b}_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.14)$$

weil die folgende *Hilfsaufgabe*

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, & x \in \Omega_h \\ u(x) &= 1, & x \in \Gamma_h \end{aligned}$$

die eindeutige Lösung $u(x) \equiv 1$ besitzt.

Damit gilt $v(x) \equiv 0$ und

$$Av = \tilde{B}u \Rightarrow \tilde{B} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot 0 = 0, \text{ also (8.14).}$$

Bem: Für das (reine) Neumannproblem (d.h. $\Gamma = \Gamma_N$) ist $C = -\tilde{B}$ singulär; Lösung ist nicht eindeutig.

8.7 Die Kollokationsmethode in 3D

Die Aufgabe:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & , \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ u(x) = g_1(x) & , \quad x \in \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n_x}(x) = g_2(x) & , \quad x \in \Gamma_N, \quad \Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Die *Integralgleichung* lautet:

$$\frac{1}{2}u(y) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n_x}(x, y)u(x) dF_x + \int_{\Gamma} u^*(x, y)v(x) dF_x.$$

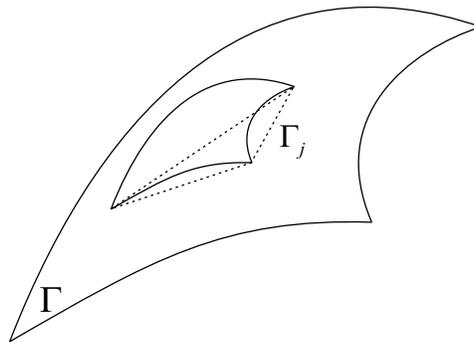
Die *Fundamentallösung in 3D* ist:

$$u^*(x, y) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|x - y|}$$

Die Diskretisierung des Randes ist

$$\Gamma \approx \Gamma_h = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j,$$

wobei Γ_j ebene Dreiecke sind.



Wir benutzen wieder die *stückweise konstanten Ansatzfunktionen*

$$u_h(x) = u_j, \quad x \in \Gamma_j \quad \frac{\partial u_h}{\partial n_x}(x) = v_j, \quad x \in \Gamma_j$$

Die *Kollokationspunkte* können z.B. als *Massenschwerpunkte* von Γ_j gewählt werden:

$$y_i = \frac{1}{3} \left(x_i^{(1)} + x_i^{(2)} + x_i^{(3)} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

Analog zu 2D erhalten wir das folgende *System*:

$$\left(A_D : - \tilde{B}_N \right) \begin{pmatrix} v_D \\ u_N \end{pmatrix} = \left(\tilde{B}_D : - A_N \right) \begin{pmatrix} u_D \\ v_N \end{pmatrix}.$$

Es sind damit nur noch die Elemente der Matrizen A und \tilde{B} auszurechnen.

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\Gamma_j} u^*(x, y_i) dF_x \\ b_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial n_x}(x, y_i) dF_x, \quad \tilde{B} = \frac{1}{2}I + B \end{aligned}$$

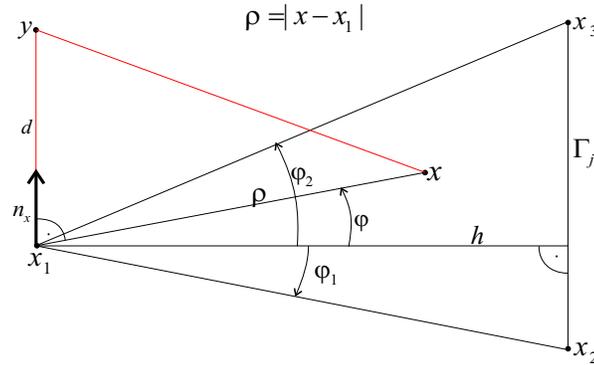
Sei $y \in \mathbb{R}^3$ ein fixierter Punkt und Γ_j ein Dreieck im \mathbb{R}^3 mit den Eckpunkten x_1, x_2, x_3 .

1) Der Spezialfall, dass $\overrightarrow{yx_1} \perp$ Ebene (Γ_j):

a) Unter Benutzung von Polarkoordinaten erhalten wir für a_{ij} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{|x-y|} dF_x &= \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{\frac{h}{\cos \varphi}} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + d^2}} \rho d\rho d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + d^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=\frac{h}{\cos \varphi}} d\varphi \\ &= \frac{h}{8\pi} \ln \frac{\sqrt{1 - \chi^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - \chi^2} \sin \varphi}{\sqrt{1 + \chi^2 \sin^2 \varphi} - \sqrt{1 - \chi^2} \sin \varphi} + \frac{|d|}{4\pi} (\arcsin(\chi \cdot \sin \varphi) - \varphi), \end{aligned}$$

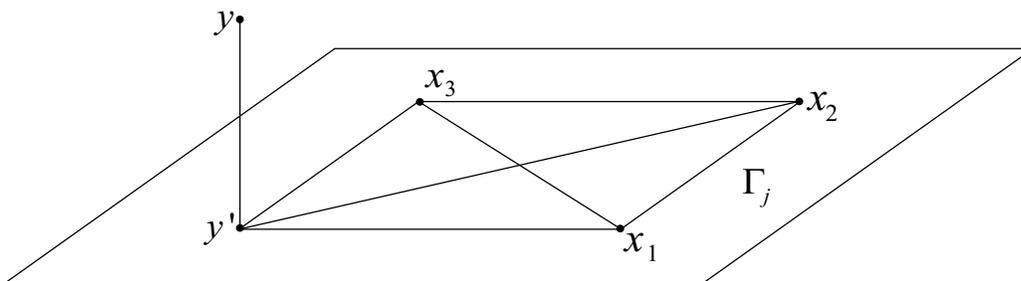
wobei $\chi^2 = \frac{d^2}{d^2 + h^2}$ und h die Dreieckshöhe durch x_1 ist.



b) Analog erhalten wir für b_{ij} :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial n_x}(x, y) dF_x &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{(x - y, n_x)}{|x - y|^3} dF_x \\
 &= \frac{d}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{|x - y|^3} dF_x \\
 &= \frac{d}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{\frac{h}{\cos \varphi}} \frac{1}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \rho d\rho d\varphi \\
 &= -\frac{d}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{\rho=0}^{\rho=\frac{h}{\cos \varphi}} d\varphi \\
 &= -\frac{\chi}{4\pi} \arcsin(\chi \sin \varphi) + \frac{\operatorname{sgn}(d)}{4\pi} \varphi \Big|_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2}
 \end{aligned}$$

2) Es ist jetzt möglich, alle Elemente der Matrizen A und B wie folgt zu berechnen:



$$\int_{\Delta x_1 x_2 x_3} = \int_{\Delta y' x_1 x_2} + \int_{\Delta y' x_2 x_3} - \int_{\Delta y' x_1 x_3}, \quad (8.15)$$

wobei die Vorzeichen von der Orientierung der Dreiecke abhängen. Für $i = j$ gilt $y = y' \in \Delta x_1 x_2 x_3$ und man hat 3 positive Vorzeichen in (8.15).

Damit erhalten wir eine relativ einfache Realisierung der Randelementmethoden auch in 3D.

Die *Kollokationsgleichungen* (8.13) liefern u_h, v_h auf Γ_h . Die numerische Auswertung der *Darstellungsformel* (8.5) ist analog zu (8.13):

$$u_h(y) = - \sum_{j=1}^n u_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial n_x}(x, y) dS_x + \sum_{j=1}^n v_j \int_{\Gamma_j} u^*(x, y) dS_x \quad \forall y \in \Omega \quad (8.16)$$

Alle Integrale exakt berechenbar.

Berechnung des Gradienten $\nabla u_h(y)$ direkt aus (8.16) und exakte Berechnung aller Integrale.

Aufwandsvergleich BEM - FEM:

3D-Problem, Gitterweite h

FEM: Rechnung (mit Multigrid): $O(h^{-3})$
 Speicher: $O(h^{-3})$ für Variable und (dünnbesetzte) Matrix

BEM: Rechnung: $O(h^{-6})$ (bzw. $O(h^{-4})$ bei Blockbandstruktur)
 Speicher: $O(\underbrace{h^{-2}}_{=N})$ für Variable, $O(h^{-4})$ für (volle) Matrix

→ zunächst viel schlechter als FEM.

Durch *Clustering* der Oberflächenzerlegung [Ha2] und Approximation durch „Niedrigrangmatrizen“ ist Reduktion auf $O(N \log^5 N)$ Rechnungen und $O(N \log^4 N)$ Speicherbedarf möglich → besser als FEM.

Vorteile der Kollokationsmethode (gegenüber Galerkin-Methode):

- simple mathematische Struktur
- einfache Codes; daher sehr beliebt für Anwendungen

Nachteil:

- schwierige Konvergenzanalyse

8.8 Sobolev-Räume im \mathbb{R}^d

Sei \mathbb{R}^d der d -dimensionale euklidische Vektorraum und

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d$$

ein Multiindex.

$$\partial^\alpha u(x) \text{ bezeichnet } \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}(x)$$

Definition 8.3 *Der Raum*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d\}$$

mit dem Konvergenzbegriff

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = u(x) \Leftrightarrow |x^\alpha \partial^\beta (u_k(x) - u(x))| < C(K) \quad \forall x \in K,$$

wobei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, heißt Schwarz-Raum der glatten, im Unendlichen schnell fallenden Funktionen.

Definition 8.4 *Der Raum $S'(\mathbb{R}^d)$ der linearen stetigen Funktionale über $S(\mathbb{R}^d)$ heißt Raum der temperierten Distributionen.*

Die Folge $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in S'(\mathbb{R}^d)$ heißt konvergent zum Funktional φ wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(u) = \varphi(u), \quad \forall u \in S(\mathbb{R}^d)$$

Bemerkung:

Wenn $\varphi \in C(\mathbb{R}^d)$ stetig ist und langsam wachsend, d.h.

$$|\varphi(x)| = O(|x|^\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

dann heißt die Funktion φ *temperiert* und kann mit einer Distribution aus $S'(\mathbb{R}^d)$ identifiziert werden:

$$\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) u(x) dx$$

Definition 8.5

Der Operator

$$\underbrace{[\mathcal{F}u]}_{=\hat{u}(\xi)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{i(x,\xi)} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad u \in S(\mathbb{R}^d)$$

heißt Fouriertransformation von u .

Lemma 8.2 Die Fouriertransformation ist eine bijektive Abbildung, $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^d) \rightarrow S(\mathbb{R}^d)$

Beweis:

Die Fouriertransformation erfüllt offenbar, dass sie und alle ihre Ableitungen

$$\partial^\alpha [\mathcal{F}u](\xi) = i^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) x^\alpha e^{i(x,\xi)} dx$$

absolut konvergente Integrale und damit stetige Funktionen sind.

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} |\xi^\beta \partial^\alpha [\mathcal{F}u](\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\beta (x^\alpha u(x)) e^{i(x,\xi)} dx \right| \quad (\text{mit } |\beta| \text{ part. Integrationen}) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\partial^\beta (x^\alpha u(x))| dx \leq C, \end{aligned}$$

weil sich $\partial^\beta (x^\alpha u(x))$ durch die Produkte von Polynomen und Ableitungen von $u(x)$ darstellen läßt.

Damit gilt $\mathcal{F}(S) \subseteq S$.

Die inverse Fouriertransformation ist

$$[\mathcal{F}^{-1}\hat{u}](x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi$$

und hat offenbar die gleichen Eigenschaften.

Damit ist alles bewiesen:

$$[\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}u]](x) = u(x) \quad \forall u \in S(\mathbb{R}^d).$$

□

Definition 8.6 (Fouriertransformation einer Distribution)

Die Fouriertransformation einer Distribution $\varphi \in S'(\mathbb{R}^d)$ ist durch die Dualität

$$[\mathcal{F}\varphi](u) := \varphi(\mathcal{F}u), \quad \forall u \in S(\mathbb{R}^d)$$

definiert.

Beispiel 1:

Die δ -Distribution: $\delta(u) = u(0)$

$$\Rightarrow [\mathcal{F}\delta](u) := \delta[\mathcal{F}u] = [\mathcal{F}u](0) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} 1 \cdot u(x) dx$$

Damit gilt $\mathcal{F}\delta = 1$ oder: $\hat{\delta}(\xi) = 1$.

Die Fouriertransformation der Konstanten ist damit

$$\hat{1}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} 1 \cdot [\mathcal{F}u](x) dx = \hat{\delta}(u) = (2\pi)^d \delta(u)$$

Es gilt auch:

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}\partial^\alpha u(x)](\xi) &= (-i)^{|\alpha|} \xi^\alpha [\mathcal{F}u](\xi) \\ \partial^\alpha [\mathcal{F}u](\xi) &= i^{|\alpha|} [\mathcal{F}x^\alpha u(x)](\xi). \end{aligned}$$

Definition 8.7 Der Sobolev-Raum $H^s(\mathbb{R}^d) \subset S'$, $s \in \mathbb{R}$ ist

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in S'(\mathbb{R}^d) \mid |\hat{u}(\xi)|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

d. h.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty$$

Lemma 8.3 Für $s \in \mathbb{N}$ ist die Norm in H^s zu der üblichen Norm in $H^s(\mathbb{R}^d)$ äquivalent:

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

8.9 Sobolev-Räume mit nichtganzzahliger und negativer Ordnung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Definition 8.8 Der Raum $W^{-k,q}(\Omega)$ ist wie folgt definiert

$$W^{-k,q}(\Omega) = \{u \in (C_0^\infty(\Omega))' : \|u\|_{-k,q,\Omega} < \infty\},$$

$$\|u\|_{-k,q,\Omega} := \sup_{\varphi \in C_0^\infty(\Omega); \varphi \neq 0} \frac{|\langle u, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{k,p,\Omega}}; \text{ also Distribution}$$

Lemma 8.4 $W^{-k,q}(\Omega)$ kann mit $(W_0^{k,p}(\Omega))'$ identifiziert werden.

Bem: Klassische Hölder-Räume $C^{k,\sigma}(\bar{\Omega})$:

$$\|u\|_{C^{k,\sigma}(\bar{\Omega})} := \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u|_{C^\sigma(\bar{\Omega})};$$

Hölder-Seminormen:

$$|u|_{C^\sigma(\bar{\Omega})} = \sup_{x \neq y \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\sigma}$$

Bsp: $u(x) = |x|^\lambda$ ($\lambda > 0$) $\in C^{0,\sigma}(-1, 1)$ für $\sigma \leq \lambda$

Definition 8.9 (Sobolev-Slobodeckij-Raum $H^s(\Omega)$)

Sei $s \in \mathbb{R}$. Der Sobolev-Slobodeckij-Raum $H^s(\Omega)$ ist wie folgt definiert:

1) $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$, $s \in \mathbb{Z}$

2) $s > 0 \Rightarrow s = k + \sigma$, $\sigma \in (0, 1)$; $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^s(\Omega)}^2 &= \|u\|_{k,2,\Omega}^2 + |u|_{k+\sigma,\Omega}^2 \\ (u, v)_{H^s(\Omega)} &= (u, v)_{k,\Omega} + (u, v)_{k+\sigma,\Omega}, \quad |u|_{k+\sigma,\Omega}^2 := (u, u)_{k+\sigma,\Omega} \\ (u, v)_{k+\sigma,\Omega} &:= \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y))(\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y))}{|x - y|^{d+2\sigma}} dx dy \end{aligned}$$

3) $s < 0$: $H^s(\Omega) = (H_0^{-s}(\Omega))'$, wobei

$$H_0^{-s}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|^{-s,\Omega}}$$

Bem: für $\Omega = \mathbb{R}^d$: Def. von $H^s(\mathbb{R}^d)$ via Fouriertransformation möglich: siehe [Ha1] § 6.2.3-4
 → Übung. (siehe § 8.8)

8.10 Sobolev-Räume auf Mannigfaltigkeiten

Definition 8.10 Der topologische Raum $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ ist eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand, wenn jeder Punkt $p \in \Gamma$ eine Koordinatenumgebung $U \subset \Gamma$ besitzt, so dass auf U m Funktionen

$$\mu(p) = (\mu_1(p), \dots, \mu_m(p)), \quad p \in U$$

definiert sind, die eine homöomorphe Abbildung der Umgebung U auf die offene Kugel S im \mathbb{R}^m

$$S = \{x \in \mathbb{R}^m, |x| < 1\}$$

realisieren.

Die Zahlen $\mu_i(p)$ heißen die lokalen Koordinaten.

Wenn zwei Koordinatenumgebungen U_1 und U_2 einen nichtleeren Durchschnitt besitzen, dann hat jeder Punkt $p \in U_1 \cap U_2$ die lokalen Koordinaten $\mu^{(1)}(p)$ und $\mu^{(2)}(p)$, d.h. es existieren Funktionen $g_i(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\mu_i^{(1)}(p) = g_i(\mu_1^{(2)}(p), \dots, \mu_m^{(2)}(p)) \quad i = 1, \dots, m \text{ gilt.}$$

Definition 8.11 Eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit Γ ist von der Klasse C^k (bzw. C^∞), wenn alle Funktionen g_i aus $C^k(\mathbb{R}^m)$ (bzw. $C^\infty(\mathbb{R}^m)$) sind.

Für eine kompakte Mannigfaltigkeit Γ existiert ein endliches System $U = \{U_1, \dots, U_N\}$ von Koordinatenumgebungen, die die Mannigfaltigkeit Γ überdecken.

$C^k(\Gamma)$ ist der Raum aller Funktionen $f(p) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, die in jeder Koordinatenumgebung U_i , $i = 1, \dots, N$ die folgende Form haben

$$\begin{aligned} f(p) &= \tilde{f}_i(\mu_1^{(i)}(p), \dots, \mu_m^{(i)}(p)), \quad \tilde{f}_i(x) \in C^k(\mathbb{R}^m) \\ C^\infty(\Gamma) &= \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Gamma). \end{aligned} \tag{8.17}$$

Definition 8.12 Ein Funktionensystem $\Phi = (\varphi_1(p), \dots, \varphi_N(p))$ heißt endliche Zerlegung der Einheit die der Überdeckung U untergeordnet ist, falls

- 1) $\varphi_l(p) \in C^\infty(\Gamma)$, $l = 1, \dots, N$
- 2) $0 \leq \varphi_l(p) \leq 1$, $\forall p \in \Gamma$
- 3) $\sum_{l=1}^N \varphi_l(p) = 1$, $\forall p \in \Gamma$
- 4) $\text{supp } \varphi_l(p) \subset U_l$, $l = 1, \dots, N$

Jede Funktion $f(p)$ lässt sich damit wie folgt zerlegen:

$$f(p) = \sum_{i=1}^N f_i(p), \quad f_i(p) = f(p)\varphi_i(p), \quad \text{supp } f_i \subset U_i.$$

Definition 8.13 Die Überdeckung U mit der ihr untergeordneten Zerlegung der Einheit auf Γ heißt Atlas von $\Gamma : A = \{U, \Phi\}$.

Definition 8.14 (Sobolev-Raum $H^s(\Gamma)$)

Sei Γ eine C^∞ -Mannigfaltigkeit mit dem Atlas A . Der Sobolev-Raum $H^s(\Gamma)$ ist der Abschluss des Raumes $C^\infty(\Gamma)$ bezüglich der Norm

$$\|f\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{l=1}^N \|\tilde{f}_l\|_{H^s(\mathbb{R}^m)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Die Funktionen \tilde{f}_l sind auf S durch (8.17) definiert und mit Null auf \mathbb{R}^m fortgesetzt. Damit gilt offenbar $\tilde{f}_l \in S(\mathbb{R}^m)$!

Lemma 8.5 (endliche Atlanten führen zu äquivalenten Normen)

Unterschiedliche endliche Atlanten einer Mannigfaltigkeit führen zu äquivalenten Normen in $H^s(\Gamma)$.

Im zweidimensionalen Fall besteht die Möglichkeit, die Fourierreihen zu benutzen: Γ sei eine einfache, geschlossene Kurve

$$\Gamma = \{x(t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t < 1, |\dot{x}(t)| \geq \chi > 0\}.$$

$H^s(\Gamma)$, $s \in \mathbb{R}$ ist der Abschluss von 1-periodischen Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R})$ bzgl.

$$\|f\|_{H^s(\Gamma)} = \left(|f_0|^2 + \sum_{k \neq 0} |f_k|^2 |k|^{2s} \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei $f_k = \int_0^1 f(t) e^{-i2\pi kt} dt$ die Fourierkoeffizienten von $f(t)$ bezeichnen:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{i2\pi kt}, \quad i^2 = -1$$

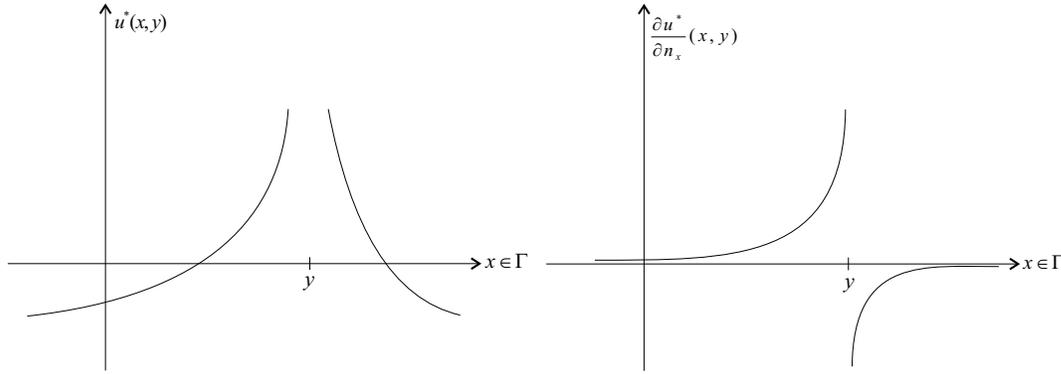
8.11 Eigenschaften von Randintegraloperatoren

Wir betrachten für $y \in \Gamma$:

$$(A_1 v)(y) = \int_{\Gamma} u^*(x, y) v(x) dS_x \quad (\text{Einfachschichtpotential})$$

$$(B u)(y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n_x}(x, y) u(x) dS_x \quad (\text{Doppelschichtpotential})$$

$$(A_2 u)(y) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u^*}{\partial n_x \partial n_x}(u(x) - u(y)) dS_x \quad (\text{hypersingulärer Operator})$$



Die Operatoren A_1, B und A_2 definieren auf einer C^∞ -Mannigfaltigkeit Γ *Pseudo-Differentialoperatoren ganzzahliger Ordnung*:

$$A_1 : H^s \rightarrow H^{s+1} \quad A_2 : H^s \rightarrow H^{s-1}, \quad B : H^s \rightarrow H^s; \quad s \in \mathbb{R}$$

A_1, B, A_2 sind also von der Ordnung $-1, 0, 1$.

Es gilt:

$$\langle A_\alpha u, v \rangle_{L^2} = \langle u, A_\alpha v \rangle_{L^2}, \quad \alpha = 1, 2$$

und

$$\langle Bu, v \rangle_{L^2} = \langle u, B^*v \rangle_{L^2}.$$

Beispiel 8.3

Sei

$$\Gamma = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x = r \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 1 \right\}$$

ein Kreis mit Radius $r > 0$.

1) Operator A_1 :

Sei $y = r(\cos 2\pi\tau, \sin 2\pi\tau)^T \in \Gamma$.

$$\begin{aligned} (A_1 v)(y) &= \int_{\Gamma} u^*(x, y) v(x) dS_x = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln |x - y| v(x) dS_x \\ &= -r \int_0^1 \ln |2r \sin \pi(t - \tau)| v(t) dt \\ &= -r \ln(2r) \int_0^1 v(t) dt - r \int_0^1 \ln |\sin \pi(t - \tau)| v(t) dt \end{aligned}$$

Die Funktionen $v_k(t) = e^{i2\pi kt}$, $k \in \mathbb{Z}$ sind die Eigenfunktionen von A_1 :

$$(A_1 v_k)(\tau) = \lambda_k v_k(\tau), \quad \lambda_k = \begin{cases} -r \ln r & , \quad k = 0 \\ \frac{r}{2|k|} & , \quad k \neq 0 \end{cases}$$

Für $r < 1$ ist A_1 positiv definit. $\lambda_k = O(|k|^{-1})$ spiegelt den Gewinn einer Differenzierungsstufe wieder.

2) Operator B :

$$\left(\underbrace{\left(\frac{1}{2}I + B \right)}_{= \tilde{B}} u \right) (\tau) = \dots = \frac{1}{2}u(\tau) - \frac{1}{2} \int_0^1 u(t) dt$$

Es gilt

$$\left(\left(\frac{1}{2}I + B \right) v_k \right) (\tau) = \lambda_k v_k(\tau)$$

mit

$$\lambda_k = \begin{cases} 0 & , \quad k = 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad k \neq 0 \end{cases}, \quad v_k(\tau) = e^{i2\pi k\tau}$$

3) Operator A_2 :

$$(A_2 u)(\tau) = -\frac{1}{4r} \int_0^1 \frac{u(t) - u(\tau)}{\sin^2 \pi(t - \tau)} dt$$

$$(A_2 v_k)(\tau) = \lambda_k v_k(\tau), \quad \lambda_k = \begin{cases} 0 & , \quad k = 0 \\ \frac{1}{2r}|k| & , \quad k \neq 0. \end{cases}$$

8.12 Das Galerkin-Verfahren für das Dirichlet-Problem

Die Aufgabe:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0 & , \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x) = g(x) & , \quad x \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Die *Randintegralformulierung* (aus (8.6)): Finde $v|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma}$, so dass

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln|x-y| v(x) dS_x = f(y) := \frac{1}{2}g(y) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{(x-y, n_x)}{|x-y|^2} g(x) dS_x, \quad y \in \Gamma$$

oder in der *Operatorform*:

$$(A_1 v)(y) = f(y), \quad y \in \Gamma \quad (8.18)$$

Eigenschaften von A_1 für $\text{diam}(\Omega) < 1$:

$$\begin{aligned} A_1 : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{ bijektiv} \\ \langle A_1 u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} &= \langle u, A_1 v \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \forall u, v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \langle A_1 u, u \rangle_{L^2(\Gamma)} &\geq \gamma \|u\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \quad \forall u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \gamma > 0 \quad (\text{Gårding-Ungleichung, vgl. Koerzivität}) \\ C_1 \|u\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq \|A_1 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C_2 \|u\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad \forall u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (\text{Stetigkeit von } A_1, A_1^{-1}) \end{aligned} \quad (8.19)$$

Mit einer Parametrisierung $x(t)$ von Γ ergibt sich

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln |x(t) - y(\tau)| v(t) dt = f(\tau), \quad 0 \leq \tau < 1$$

Variationsformulierung von (8.18):

geg.: $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (folgt zB aus $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \Rightarrow Bg \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$)

ges.: $v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ mit

$$\langle A_1 v, w \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle f, w \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \forall w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Sei $H_n \subset H^{-\frac{1}{2}}$ der Raum der Ansatzfunktionen (1-periodische Splines der Ordnung $J \Rightarrow H_n \subset H^a$ für $a < J + \frac{1}{2}$; z.B. stückweise konstant, d.h. $J = 0$), die die folgenden Approximationseigenschaften besitzen:

$$\inf_{u_n \in H_n} \|u - u_n\|_{H^a} \leq c_1 h^{s-a} \|u\|_{H^s}, \quad -\infty < a \leq s \leq J + 1, \quad a < J + \frac{1}{2} \quad \forall u \in H^s, \quad (8.20)$$

$$c_s h^{s-a} \|u_n\|_{H^s} \leq \|u_n\|_{H^a} \leq \|u_n\|_{H^s} \quad \forall u_n \in H_n, \quad (8.21)$$

wobei die letzte Ungleichung „*inverse Voraussetzung*“ genannt wird (vgl. (6.17)).

Beispiel 8.4

- 1) Sei f stückweise konstant auf Γ (mit endlich vielen Sprüngen)
 $\Rightarrow f \in L^2(\Gamma) = H^0 \subset H^{-\frac{1}{2}}$, aber i.A. $f \notin H^{\frac{1}{2}}$

2) Sei f stückweise linear $\Rightarrow f \in H^1 \subset H^{\frac{1}{2}}$

Das *Galerkin-Verfahren* für (8.18) lautet:

Finde $v_n \in H_n$, so dass

$$\langle A_1 v_n, w \rangle_{L^2} = \langle f, w \rangle, \quad \forall w \in H_n \quad (8.22)$$

Diese Aufgabe ist zum folgenden linearen Gleichungssystem äquivalent:

$$\begin{aligned} Ay = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad y, b \in \mathbb{R}^n \\ a_{kl} = \langle A_1 \varphi_l, \varphi_k \rangle_{L^2}, \quad b_k = \langle f, \varphi_k \rangle_{L^2}, \end{aligned} \quad (8.23)$$

wobei $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ eine Basis im H_n bezeichnet.

Satz 8.1 *Das Gleichungssystem (8.23) ist für alle $n > J + 1$ eindeutig lösbar. Die Galerkin-Näherung erfüllt:*

$$\|v_n - v\|_{H^a} \leq ch^{s-a} \|v\|_{H^s},$$

wobei $-2 - J \leq a \leq s \leq J + 1$, $a < J + \frac{1}{2}$ gelten muss.

Die Galerkin-Näherung ist stabil in $H^{-\frac{1}{2}}$:

$$\|v_n\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \leq c \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}}$$

Beweis:

Die Matrix A des GLS (8.23) ist *symmetrisch*:

$$a_{kl} = \langle A_1 \varphi_l, \varphi_k \rangle_{L^2} = \langle \varphi_l, A_1 \varphi_k \rangle = \langle A_1 \varphi_k, \varphi_l \rangle_{L^2} = a_{lk}$$

und *positiv definit*:

$$\forall z \in \mathbb{R}^n : \quad (Az, z) = \langle A_1 \Phi z, \Phi z \rangle_{L^2} = \langle A_1 u, u \rangle_{L^2} \stackrel{\text{Gårding}}{\geq} \gamma \|u\|_{H^{-\frac{1}{2}}}^2, \quad u = \Phi z \in H^{-\frac{1}{2}}.$$

Damit ist (8.23) *eindeutig lösbar*.

Aus der *Gårding-Ungleichung* für $v_n \in H^{-\frac{1}{2}}$ ergibt sich die *Stabilität*:

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{H^{-\frac{1}{2}}}^2 &\leq \frac{1}{\gamma} \langle A_1 v_n, v_n \rangle_{L^2} = \frac{1}{\gamma} \langle f, v_n \rangle_{L^2} \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}} \|v_n\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \\ \Rightarrow \|v_n\|_{H^{-\frac{1}{2}}} &\leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

- Der Beweis der *Konvergenz* wird zunächst für $a = -\frac{1}{2}$ durchgeführt:

$$\|v_n\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \leq c_2 \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}} = c_2 \|A_1 v\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq c_3 \|v\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \quad (\text{Stetigkeit}) \quad (8.24)$$

Wir betrachten den *Projektor* der Galerkin-Approximation $P: H^{-\frac{1}{2}} \rightarrow H_n$ mit $Pv := v_n$.

Es gilt: $Pw = w \quad \forall w \in H_n$ und $\|Pv\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \leq c_3 \|v\|_{H^{-\frac{1}{2}}}$. (laut (8.24))

$\forall \tilde{v} \in H_n$ gilt:

$$\begin{aligned} \|v - v_n\|_{H^{-\frac{1}{2}}} &\leq \|v - \tilde{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + \|\tilde{v} - v_n\|_{H^{-\frac{1}{2}}} = \|v - \tilde{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + \|P(\tilde{v} - v)\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \\ &\leq (1 + c_3) \|v - \tilde{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \\ \Rightarrow \|v - v_n\|_{H^{-\frac{1}{2}}} &\leq (1 + c_3) \inf_{\tilde{v} \in H_n} \|v - \tilde{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \stackrel{(8.20)}{\leq} c_5 h^{s+\frac{1}{2}} \|v\|_{H^s} \end{aligned} \quad (8.25)$$

(vgl. vorletzte Abschätzung mit Céa-Lemma)

- Für $s \geq a > -\frac{1}{2}$ wird die *inverse Voraussetzung* benutzt:

$$\begin{aligned} \|v - v_n\|_{H^a} &\leq \|v - \tilde{v}\|_{H^a} + \underbrace{\|\tilde{v} - v_n\|_{H^a}}_{\in H_n} \stackrel{(8.20), (8.21)}{\leq} c_6 h^{s-a} \|v\|_{H^s} + c_7 h^{-\frac{1}{2}-a} \|\tilde{v} - v_n\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \\ &= c_6 h^{s-a} \|v\|_{H^s} + c_7 h^{-\frac{1}{2}-a} \|P(\tilde{v} - v)\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \\ &\leq c_6 h^{s-a} \|v\|_{H^s} + c_8 h^{-\frac{1}{2}-a} \|\tilde{v} - v\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \\ &\stackrel{(8.20)}{\leq} c_6 h^{s-a} \|v\|_{H^s} + c_8 \underbrace{h^{-\frac{1}{2}-a} h^{s+\frac{1}{2}}}_{=h^{s-a}} \|v\|_{H^s} \\ &\leq c_9 h^{s-a} \|v\|_{H^s} \end{aligned}$$

- Für $a < -\frac{1}{2}$ benutzen wir den sog. *Nitsche-Dualitätstrick* (vgl. Bew. von Satz 6.2): Sei $\varphi \in H^{-a}$ eine beliebige Funktion. Für die Lösung von $A_1 w = \varphi$ gilt mit (8.19):

$$\|w\|_{H^{-a-1}} \leq c_{10} \|\varphi\|_{H^{-a}} \quad (8.26)$$

$\forall \tilde{v} \in H_n$:

$$\begin{aligned}
|\langle v - v_n, \varphi \rangle_{L^2}| &= |\langle v - v_n, A_1 w \rangle_{L^2}| \\
&= |\langle v - v_n, A_1(w - \tilde{v}) + A_1 \tilde{v} \rangle_{L^2}| \\
&\stackrel{(*)}{=} |\langle v - v_n, A_1(w - \tilde{v}) \rangle_{L^2}| \\
&\leq \|v - v_n\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \|A_1(w - \tilde{v})\|_{H^{\frac{1}{2}}} \\
&\stackrel{(8.19)}{\leq} c_{12} \|v - v_n\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \|w - \tilde{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \\
&\stackrel{(8.25)}{\leq} c_{13} h^{s+\frac{1}{2}} \|v\|_{H^s} \|w - \tilde{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \\
\Rightarrow |\langle v - v_n, \varphi \rangle_{L^2}| &\leq c_{13} h^{s+\frac{1}{2}} \|v\|_{H^s} \inf_{\tilde{v} \in H_n} \|w - \tilde{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \\
&\stackrel{(8.20)}{\leq} c_{14} h^{s+\frac{1}{2}} \|v\|_{H^s} h^{-a-1+\frac{1}{2}} \|w\|_{H^{-a-1}} \\
\Rightarrow \|v - v_n\|_{H^a} &= \sup_{\|\varphi\|_{H^{-a}}=1} |\langle v - v_n, \varphi \rangle_{L^2}| \\
&\stackrel{(8.26)}{\leq} c_{15} h^{s-a} \|v\|_{H^s} \sup_{\|\varphi\|_{H^{-a}}=1} \|\varphi\|_{H^{-a}} \\
&= c_{15} h^{s-a} \|v\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

(*) Mit den Galerkingleichungen (8.22) gilt: $\langle A_1(v - v_n), \tilde{v} \rangle = 0 \quad \forall \tilde{v} \in H_n$ („fundamentale Orthogonalität“).

□

Bsp: Für stückweise konstante Ansatzfunktionen ($J = 0$) ist die maximale Konvergenzordnung 3:

$$\|v_n - v\|_{H^{-2}} \leq ch^3 \|v\|_{H^1}.$$

Ref: [GR] § 9, [Ha2] § 8,9, [STW] § III.

A Literaturverzeichnis

- [AH] **K. Atkinson und W. Han**, *Theoretical Numerical Analysis - A Functional Analysis Framework*, Springer 2001.
- [Bra] **D. Braess**, *Finite Elemente*, Springer, 1997.
- [Bri] **W.L. Briggs**, *A Multigrid Tutorial*, SIAM, 1987.
- [GR] **C. Grossmann und H.-G. Roos**, *Numerik Partieller Differentialgleichungen*, Teubner, 1994.
- [Ha1] **W. Hackbusch**, *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*, Teubner, 1996.
- [Ha2] **W. Hackbusch**, *Integralgleichungen, Theorie und Numerik*, Teubner, 1997.
- [HB] **M. Hanke-Bourgeois**, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, Teubner, 2002.
- [KA] **P. Knabner und L. Angermann**, *Numerik partieller Differentialgleichungen*, Springer, 2000.
- [MN] **Multigrid-Net**: www.mgnet.org
- [STW] **A.H. Schatz, V. Thomée, W.L. Wendland**, *Mathematical Theory Of Finite And Boundary Element Methods*, Birkhäuser, 1990.
- [Str] **J.C. Strikwerda**, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Chapman & Hall, 1989.

B Folien

(In-)Stabilität von Differenzenverfahren

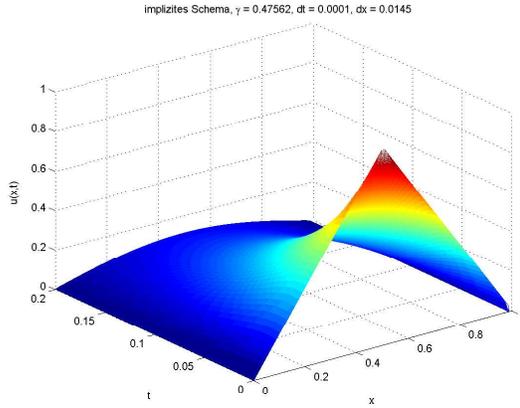
Wärmeleitungsgleichung:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0$$

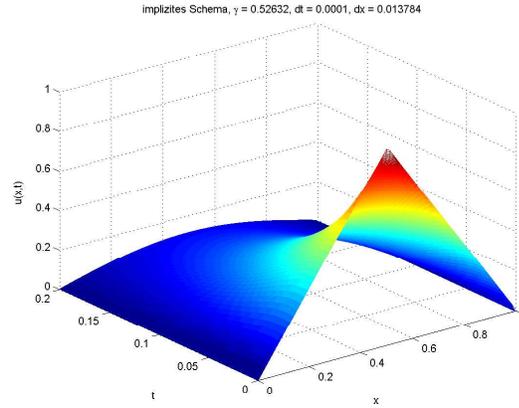
$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) = 1 - |1 - 2x|$$

$$h = 0.0145, \quad k = 0.0001, \quad \gamma = \frac{k}{h^2} = 0.47562:$$

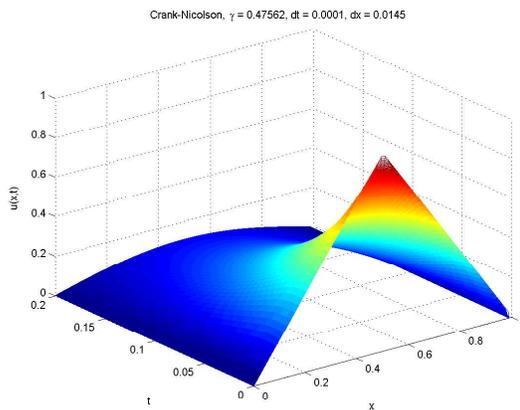
$$h = 0.013748, \quad k = 0.0001, \quad \gamma = \frac{k}{h^2} = 0.52632:$$



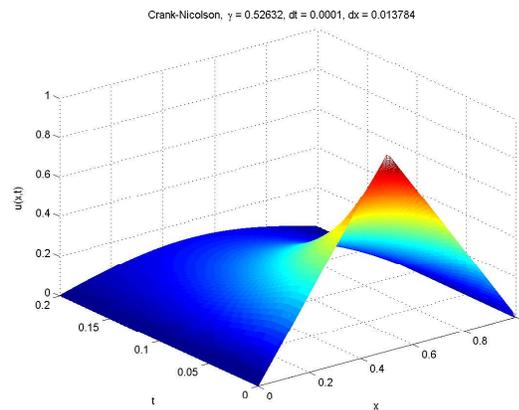
rein implizites Schema



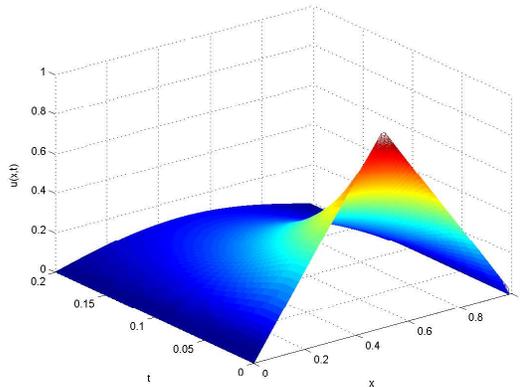
rein implizites Schema



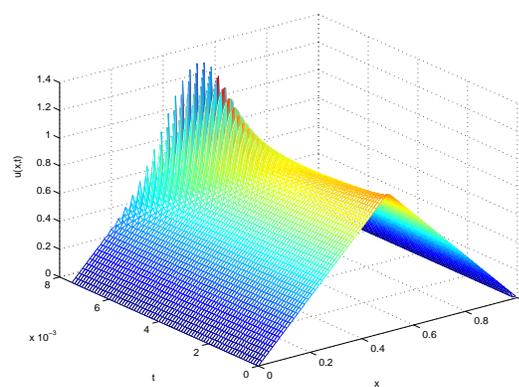
Crank-Nicolson Schema



Crank-Nicolson Schema



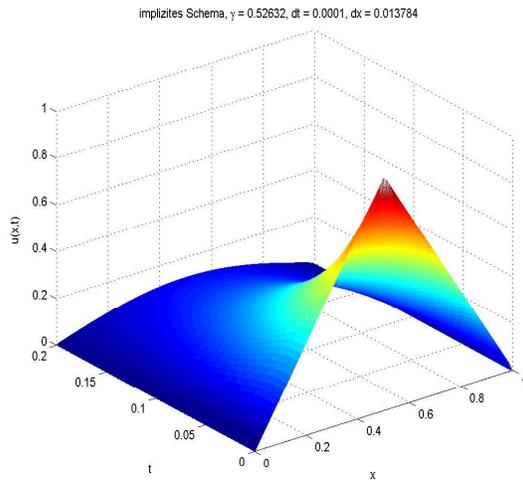
explizites Schema



explizites Schema

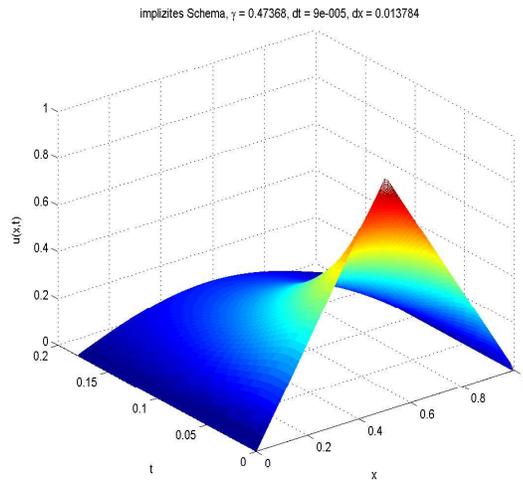
$$h = 0.013748, k = 0.0001, \gamma = \frac{k}{h^2} = 0.52632:$$

$$h = 0.013748, k = 0.00009, \gamma = \frac{k}{h^2} = 0.47368:$$



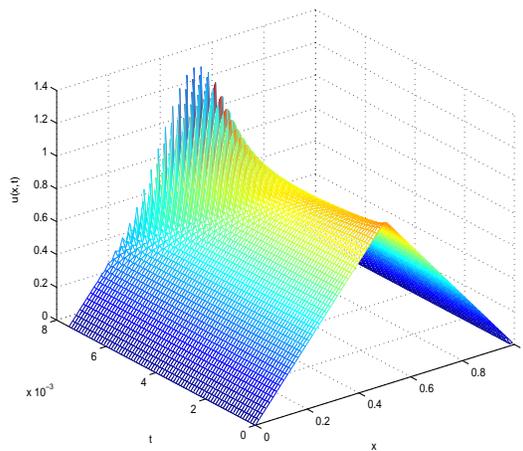
rein implizites Schema

impl. Schema, $\gamma = 0.52632, dt = 0.0001, dx = 0.013748$

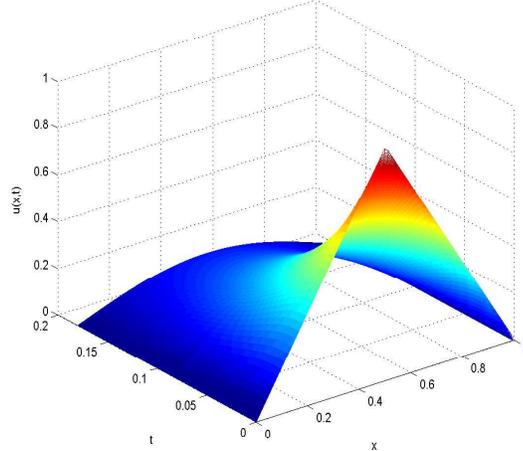


rein implizites Schema

expl. Schema, $\gamma = 0.47368, dt = 9e-005, dx = 0.013748$



explizites Schema



explizites Schema

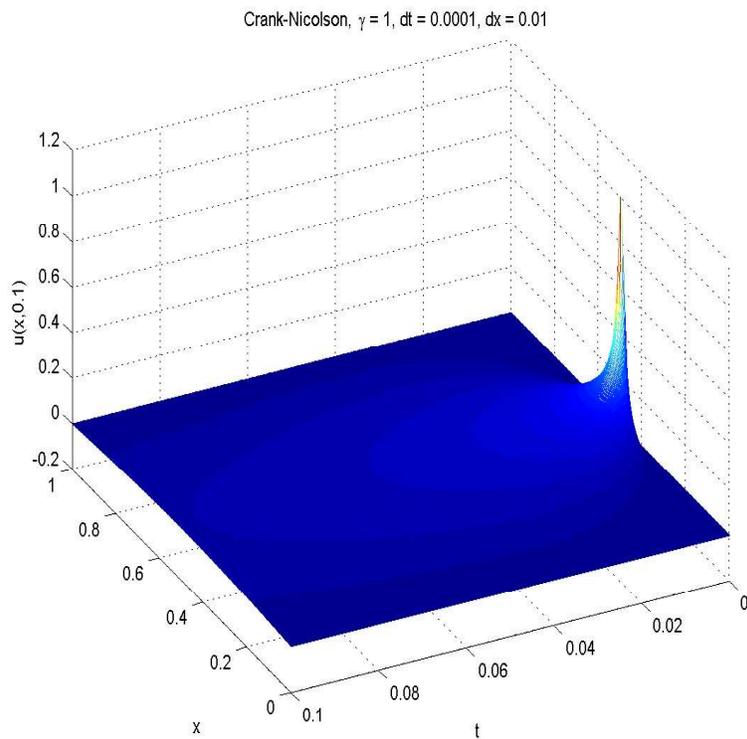
Vergleich mit Stabilität von expl./impl. Euler-Verfahren für GDGL.:
Semidiskretisierung (Linienmethode) mit h fest:

$$\partial_t u_j(t) = D_x^2 u_j(t); \quad j = 0, \dots, J; \quad t > 0$$

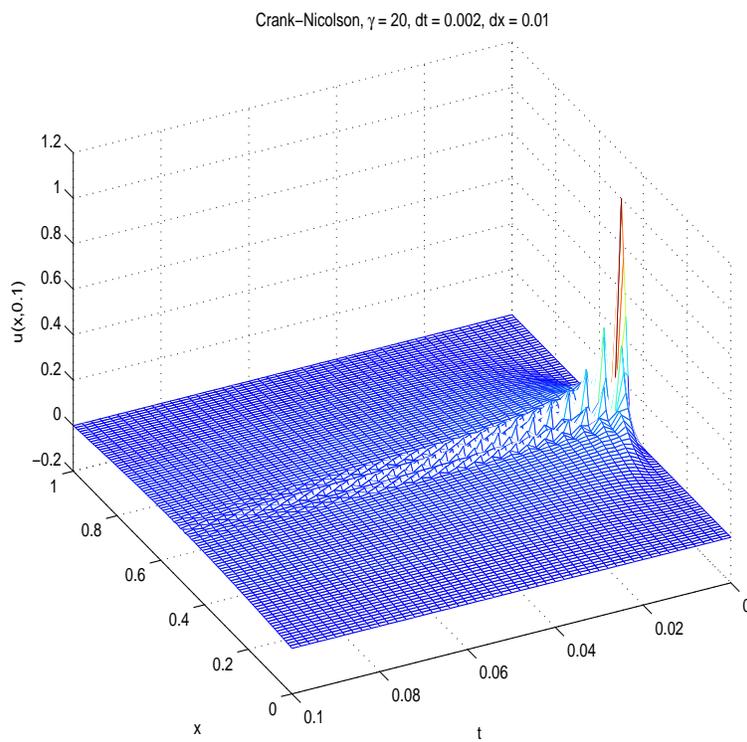
betrachte $u' = -\lambda u, t > 0$:

expl. Euler: stabil für $k \leq \frac{2}{\lambda}$

impl. Euler: stabil für $k > 0$ (A-stabil)



Lösung $u(x, t)$ für $h = 0.01$, $k = 0.0001$, $\gamma = 1$



Lösung $u(x, t)$ für $h = 0.01$, $k = 0.002$, $\gamma = 20$:
diskretes Maximumprinzip nicht erfüllt: Oszillationen in t !

Zweigitter-Algorithmus

Bsp:

$$\left. \begin{array}{l} u'' = 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u \equiv 0$$

diskret:

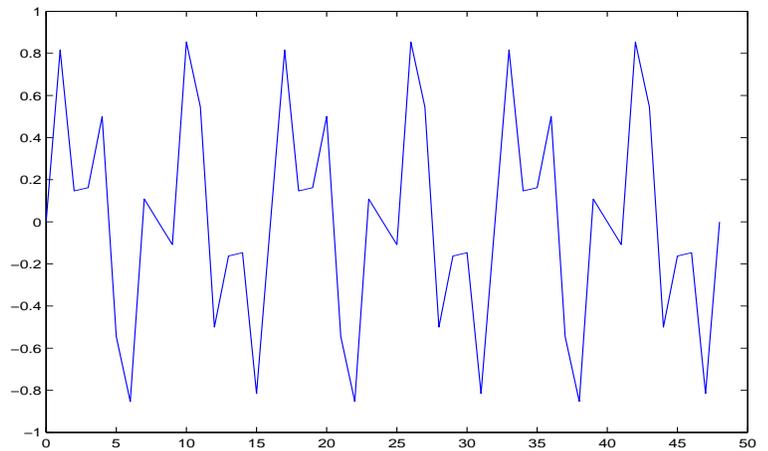
$$Ay = 0; \quad y = (y_1, \dots, y_{N-1}); \quad y_0 = y_N = 0 \quad \Rightarrow y = 0$$

$$\text{mit: } A = \text{tridiag}(-1, 2, -1); \quad \text{hier } N = 48$$

Iteration mit gedämpftem Jakobi-Verfahren ($\omega = \frac{2}{3}$): $T = I - \omega \frac{1}{2} A$

Startvektor/-fehler

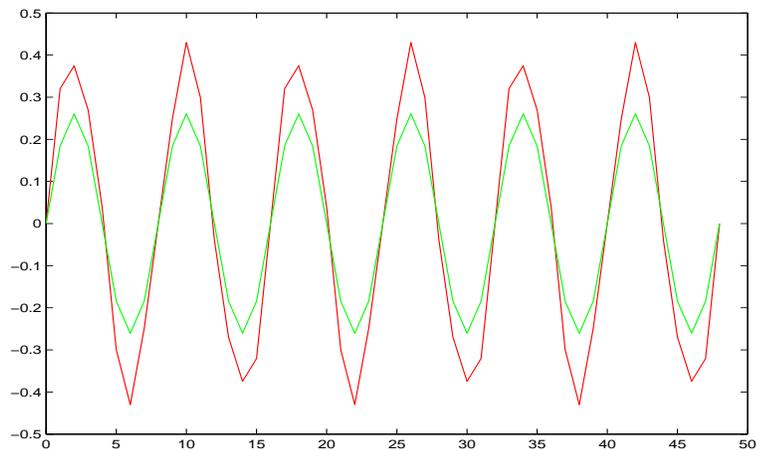
$$z_{2,0} = e_0 := \frac{1}{2} \left(\sin \frac{12j\pi}{N} + \sin \frac{30j\pi}{N} \right)$$



$$\|e_0\|_\infty = 0.854$$

Vorglättung ($m_1 = 3$ Schritte)

$$z_{2,l+1} := T_2 z_{2,l}; \quad l = 0, 1, 2$$



$$\|e_1\|_\infty = 0.430$$

$$\|e_3\|_\infty = 0.261$$

Grobitterkorrektur (3 Iterationen)

$r_1 := I_2^1(A_2 z_{2,3})$... Residuum in V_1
 iterative Lösung von $A_1 g_1 = r_1$:

$$g_{1,0} := 0$$

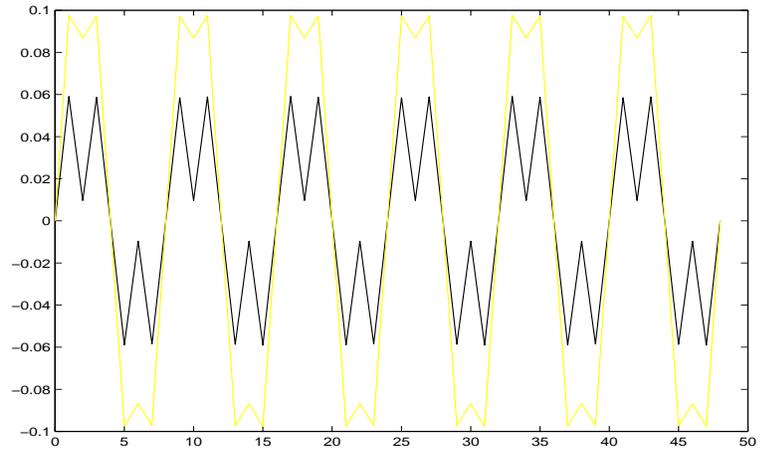
$$g_{1,l+1} := T_1 g_{1,l} + \omega \frac{N}{4} r_1; \quad l = 0, 1, 2$$

Addieren der Korrektur in V_2 :

$$(\tilde{z}_{2,4} := z_{2,3} - I_1^2 g_{1,1})$$

$$z_{2,4} := z_{2,3} - I_1^2 g_{1,3}$$

I_2^1 ... gewichtete Restriktion
 I_1^2 ... lineare Interpolation

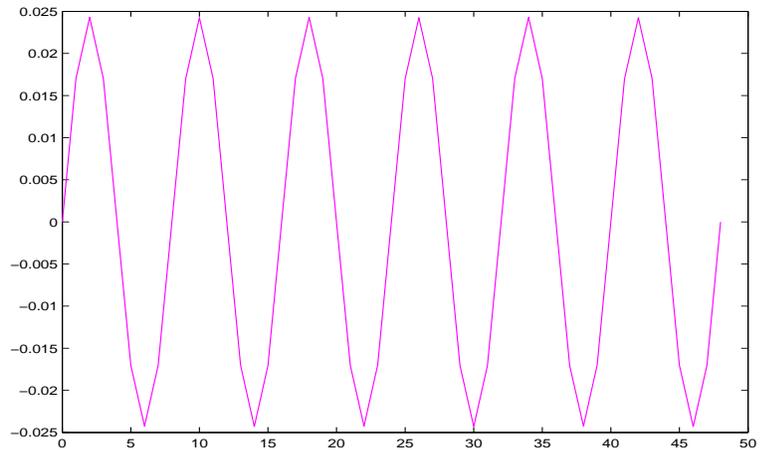


$$\|\tilde{e}_4\|_\infty = 0.098$$

$$\|e_4\|_\infty = 0.059$$

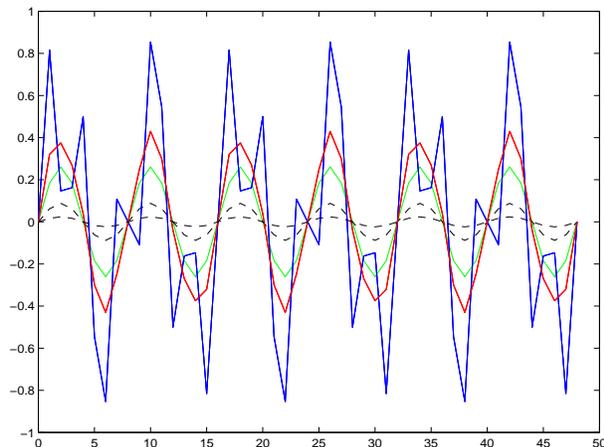
Nachglättung ($m_2 = 3$ Schritte)

$$z_{2,l+1} := T_2 z_{2,l}; \quad l = 4, 5, 6$$



$$\|e_7\|_\infty = 0.024$$

Vergleich des Aufwands:

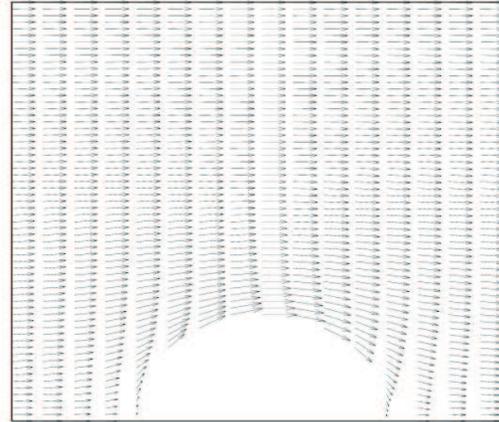
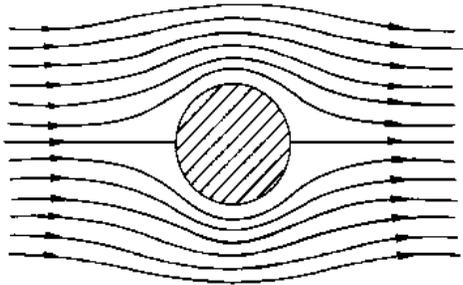


Iterationen nur auf feinem Gitter:
 $\|e_8\|_\infty = 0.0879$, $\|e_{14}\|_\infty = 0.0239$

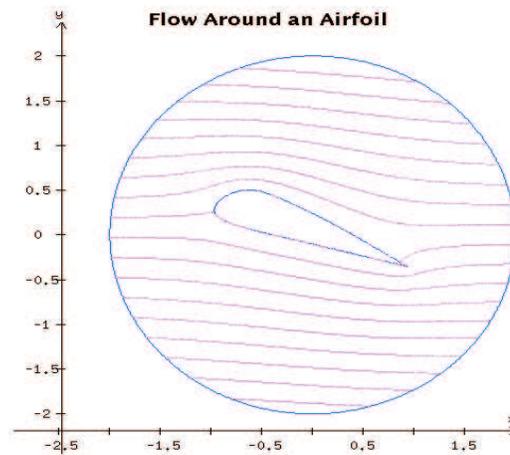
gesamte Fehlerevolution des Zweigitteralgorithmus

Potentialströmungen in 2D

Umströmung einer Kugel:



Umströmung einer Tragfläche:

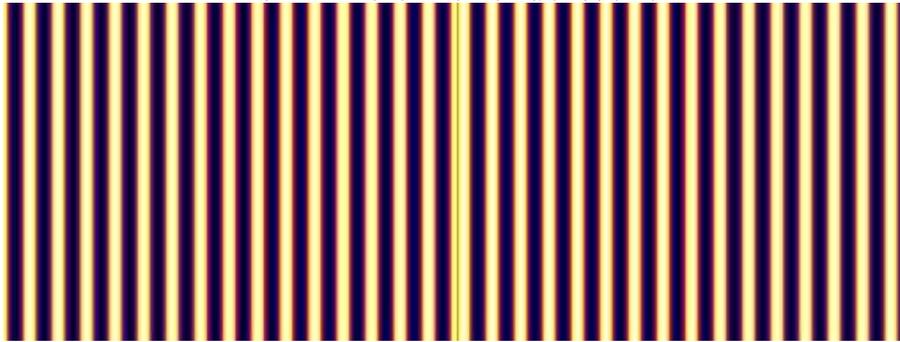


Streuung einer einfallenden Welle an „weicher“ Kugel

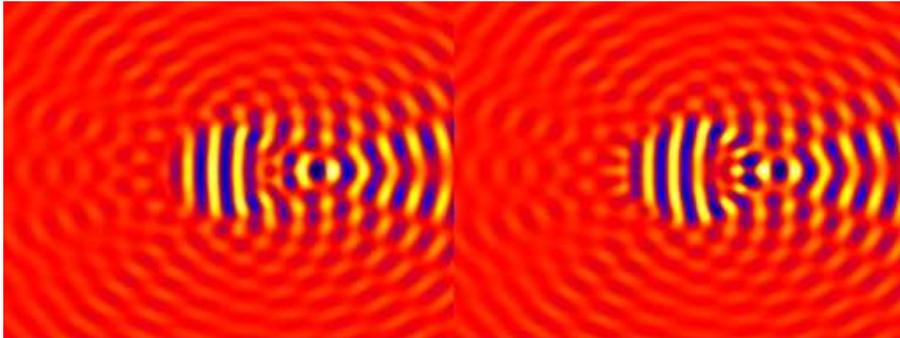
$$\Delta u + k^2(1 + f(x))u = 0; \quad k = 50; \quad f(x) = 0.6 \cdot \chi_{K_{0.3}}(x)$$

Lösung in $[-1, 1]^2$, links $\text{Re}(u)$, rechts $\text{Im}(u)$:

von links einfallende Welle:



gestreute Welle:



gesamte Welle:

