Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. Matthias Ehrhardt
Dipl.-Math. Christian Kamm

Sommersemester 09

2. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"
(Differenzenapproximation, Konsistenzordnung)

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben bis Mo, 4.5. vor der Übung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe bis Di, 12.5. 8:00.

1. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

Zeigen Sie, daß das θ–Schema aus der Vorlesung für $\theta = 0.5$ und

$$\varphi_j^n = f(x_j, t_n + k/2)$$

für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung $u \in C^{4,3}$ eine Approximation der Ordnung $\mathrm{O}(h^2 + k^2)$ liefert. Welche Approximationsordnung ergibt sich bei diesem Schema unter Benutzung von

$$\varphi_j^n = f(x_j, t_n) \ ?$$

Was bedeutet dies unter praktischen Gesichtspunkten?

2. Aufgabe (3 Punkte)

Man entwickle eine Differenzenapproximation für den Differentialoperator

$$Lu := (\kappa(x)u')'$$

durch zweimalige Anwendung von

$$u'(x) \approx \frac{1}{h}\left(u\Big(x + \frac{h}{2}\Big) - u\Big(x - \frac{h}{2}\Big)\right)$$

und studiere die Konsistenzordnung.

3. Aufgabe (3 Punkte (1.5+1.5))

Zur Diskretisierung von

$$-u''(x) = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

wähle man ein beliebiges Gitter

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_J$$

und setze $h_j := x_j - x_{j-1}$.

a) Zeigen Sie, daß die folgende Diskretisierung zweckmäßig ist:

$$\frac{2}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{u_j - u_{j+1}}{h_{j+1}} + \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j} \right) = f_j.$$

b) Wie verhält sich der Konsistenzfehler im Vergleich zu dem auf dem äquidistanten Gitter?

4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Die Temperaturverteilung in einem Stab der Länge 1 genügt der Wärmeleitungsleichung

$$u_t = u_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

Die Temperatur in den beiden Endpunkten des Stabes sei gegeben durch

$$u(0,t) = u(1,t) = 12\sin^2(12\pi t), \quad t \geq 0.$$

Am Anfang habe der Stab die Temperatur Null: $u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1$.

Berechnen Sie die genäherte Temperaturverteilung mit dem *expliziten Euler–Verfahren* und mit dem *Crank–Nicolson–Verfahren*.

a) Erzeugen Sie einen Plot der mit $h = 1/6, k = 1/72$ berechneten Lösungen bei $t = 1/3$.

b) Plotten Sie die mit $h = 1/10, k = 1/72$ berechneten Lösungen nach dem 1., 3. und 5. Zeitschritt. Warum bleibt die mit dem expliziten Euler–Verfahren berechnete Lösung auf den inneren Punkten anfänglich null, während die CN–Lösung schon nach dem ersten Schritt überall größer als null ist?

c) Legen Sie die vier Plots sowie den Programmcode ihrer Abgabe bei.

Hinweis:
Auf `http://www.math.tu-berlin.de/~kamm/NumPDE/ueb2` befindet sich eine Referenzlösung für $h = 1/10, k = 1/72$.
Alternativ können Sie sich zum Vergleich die Lösung der Wärmeleitungsleichung mit Hilfe der Webpage `http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/numerik/pdgl/` berechnen.