Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. Matthias Ehrhardt
Dipl.-Math. Christian Kamm

Sommersemester 09

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"

(Tridiagonalmatrizen, Diskretes Maximumprinzip, ℓ^∞–Stabilität)

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben bis Mo, 18.5. vor der Übung.

1. Aufgabe (2 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der *Tridiagonalmatrix*

$$T = \text{tridiag}(a,b,c) = \begin{pmatrix} b & c & 0 & \dots & 0 \\ a & b & c & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & a & b & c \\ 0 & \dots & 0 & a & b \end{pmatrix}_{N\times N}$$

gegeben sind durch

$$\lambda_j = b + 2c\sqrt{\frac{a}{c}}\cos\frac{j\pi}{N+1}$$

und $u_j = (u_1, \dots, u_k, \dots, u_N)^\top$ mit

$$u_k = 2\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^k \sin\frac{kj\pi}{N+1}, \qquad k = 1,\dots,N, \quad j = 1,\dots,N.$$

2. Aufgabe (3 Punkte)

Diskretisieren Sie die homogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenem Dirichletrand

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(1,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

auf einem beliebigen Ortsgitter

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_J = 1$$

und äquidistanten Zeitgitter mit dem impliziten Euler-Verfahren und der Approximation

$$u''(x) \approx \frac{2}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h_{j+1}} - \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j} \right).$$

Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für u_j^{n+1} auf und zeigen Sie, daß die Koeffizientenmatrix irreduzibel diagonaldominant und der Realteil ihrer Eigenwerte strikt größer null ist.

3. Aufgabe (5 Punkte (2.5+2.5))

Wir betrachten ein finites Differenzenverfahren für die *Konvektions–Diffusionsgleichung*

$$\begin{aligned} u_t &= a u_{xx} - b u_x, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \end{aligned}$$

wobei $a > 0$. Der Einfachheit halber nehmen wir $b > 0$ an.
Schreiben Sie das Schema $D_t^+ u_j^n = a D_x^2 u_j^n - b D_x^0 u_j^n$, $j = 1, \ldots, J-1$, in der Form

$$u_j^{n+1} = (1 - 2a\gamma) u_j^n + a\gamma(1 - P_e) u_{j+1}^n + a\gamma(1 + P_e) u_{j-1}^n, \qquad P_e = \frac{bh}{2a}$$

und beweisen Sie, daß für das Schema gilt

$$P_e \le 1 \implies \max_{0 \le j \le J} |u_j^{n+1}| \le \max_{0 \le j \le J} |u_j^n|$$

(vorausgesetzt die ℓ^2–Stabilitätsbedingung $a\gamma \le 1/2$ für $\gamma := k/h^2$ ist erfüllt).
Geben Sie ein Beispiel dafür an, daß die obige Maximumnormabschätzung für $P_e > 1$ im allgemeinen nicht mehr gilt.