

5. Übungsblatt zur Vorlesung “Numerik partieller Differentialgleichungen”
 (Poisson-Gleichung, Maximumprinzip)

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben bis Mo, 25.5. vor der Übung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe bis Di, 2.6. 8:00.

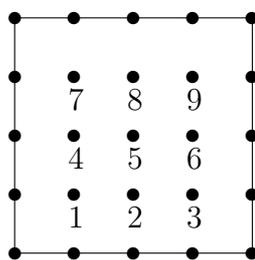
1. Aufgabe (4 Punkte (3+0.5+0.5))

Die *Poisson-Gleichung* auf dem Gebiet $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$:

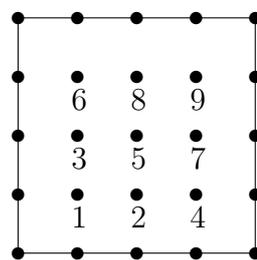
$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

soll mit dem Fünfpunktestern und $h = 1/4$ diskretisiert werden.

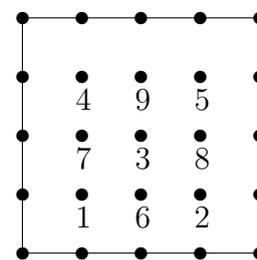
a) Wie lautet das Gleichungssystem für folgende Numerierungen:



i) zeilenweise



ii) diagonal



iii) Schachbrett

- b) Prüfen Sie jeweils, ob die Matrix A symmetrisch ist.
 c) Zeigen Sie, daß die Matrix A im Falle i) positiv definit ist.

2. Aufgabe (3 Punkte)

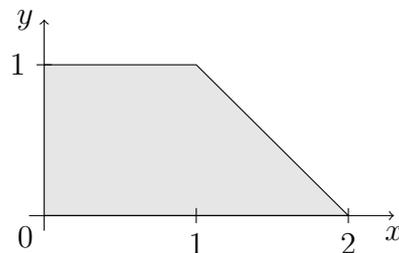
Beweisen Sie die Folgerungen 3.2 und 3.3 aus Kapitel 3.4 der Vorlesung.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei Ω die folgende Gestalt hat:



Leiten Sie mittels des unten angegebenen *Maximum–Minimum–Prinzips* untere und obere Schranken $m, R \in \mathbb{R}$ für die Lösung u her:

$$m \leq u(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Hinweis: Benutzen Sie die Vergleichsfunktion $v(x, y) = \frac{(2-x)x}{4} + \frac{(1-y)y}{4}$.

Definition: Der lineare Differentialoperator

$$Lu := - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u + cu, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

heißt *elliptisch*, falls die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}$ symmetrisch und positiv definit ist für alle $x \in \Omega$ und falls alle Koeffizienten beschränkt sind. Der Operator L heißt *gleichmäßig elliptisch*, falls eine Konstante C_E existiert, so daß

$$-\xi^\top A(x) \xi \geq C_E \|\xi\|^2, \quad \text{für alle } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Maximum–Minimum–Prinzip: Sei Ω ein beschränktes Gebiet und L ein gleichmäßig elliptischer Operator mit $c \geq 0$. Die Daten seien stetig: $f \in C(\bar{\Omega})$, $\mu \in C(\partial\Omega)$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ sei klassische Lösung von

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{in } \Omega \\ u &= \mu && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\text{a) } f \geq 0 \implies u \geq \min_{x \in \partial\Omega} \mu,$$

$$\text{b) } f \leq 0 \implies u \leq \max_{x \in \partial\Omega} \mu,$$

$$\text{c) } f = 0 \implies |u| \leq \max_{x \in \partial\Omega} |\mu|,$$

$$\text{d) } f \text{ beliebig} \implies |u| \leq \max_{x \in \partial\Omega} |\mu| + K \max_{x \in \Omega} |f|.$$

4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5+3 Punkte)

Diskretisieren Sie die *Poisson-Gleichung*

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= 3x^2, & (x, y) \in \Omega &= (-1, 1)^2 \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial\Omega, & \quad x \neq 1 \\ u(1, y) &= \frac{1}{4} \sin\left(\frac{y+1}{2} \pi\right), & y &\in (-1, 1) \end{aligned}$$

unter Benutzung des Fünfpunktesterns mit der Schrittweite $h = \Delta x = \Delta y = 1/8$. Berechnen Sie die Näherungslösung und geben Sie diese graphisch aus. Legen Sie diesen Plot sowie den Programmcode der Abgabe bei.

Sei $N = 1/h$. Berechnen Sie Näherungslösungen für $N = 4, 8, 16, 32, \dots$ bis die Rechenzeiten zu lang werden. Berechnen Sie die l^∞ -Fehler zwischen der Näherungslösung auf dem feinsten Gitter und den Lösungen auf den gröbereren Gittern (zur Vereinfachung nur in den Gitterpunkten der gröbereren Lösung), also

$$e_N = \|u_{N_{\max}} - u_N\|_{l^\infty(\Omega_N)} \quad N = 4, 8, \dots$$

und erstellen Sie einen doppelt-logarithmischen Plot dieses Fehlers über N . Fügen Sie die Gerade für N^{-2} in den Plot ein und legen diesen Ihrer Abgabe bei. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Hinweis:

Zum Vergleich können Sie die Lösung der Helmholtzgleichung (mit $\lambda = 0$) mit der Seite

<http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/numerik/pdgl/>

berechnen. Diese Lösung erhalten Sie auch mit dem Aufruf `pdedemo8` unter `Matlab`.