Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. Matthias Ehrhardt
Dipl.-Math. Christian Kamm

Sommersemester 09

9. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"
(Friedrichs–Ungleichung, Poincaré–Ungleichung, Sobolev–Ungleichung)

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben bis Mo, 22.6. vor der Übung.

1. Aufgabe (4 Punkte (3+1))

a) Man beweise die folgende *Ungleichung von Wirtinger*: Sei $u \in C^1([0,2\pi])$, $u(0) = u(2\pi)$ und $\int_0^{2\pi} u(t)\,dt = 0$. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} u(t)^2\,dt \leq \int_0^{2\pi} u'(t)^2\,dt.$$

Hinweis: Man setze für u eine Fourierentwicklung an und benutze die Parsevalsche Gleichung.

b) Weiter zeige man, daß aus dieser Ungleichung für $f \in C^1([a,b])$ bei der Annahme $f(a) = f(b) = 0$ die *klassische Friedrichs–Ungleichung*

$$\int_a^b f(x)^2\,dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b f'(x)^2\,dx.$$

folgt.

2. Aufgabe (4 Punkte (1+2+1))

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie:

a) Durch

$$\|u\|_{\Omega,c} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + c(x)\,u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

wird auf $V = H_0^1(\Omega)$ eine Norm definiert, falls $c \in L^\infty(\Omega)$ und $c \geq 0$ fast überall.

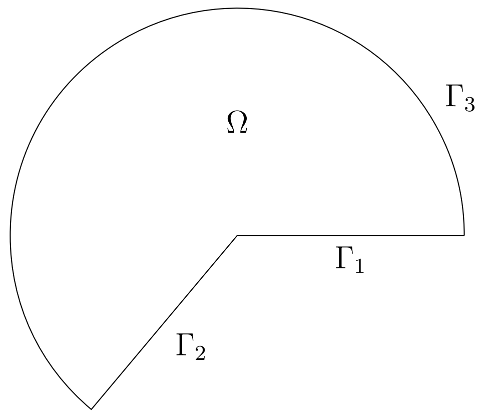
b) Der Laplace–Operator ist *koerziv* auf $(V, \|u\|_{\Omega,c})$, d.h. es existiert eine Konstante $c_2 > 0$ mit

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \geq c_2\,\|u\|_{\Omega,c}^2.$$

c) Wie hängt die Koerzivitätskonstante von der verwendeten Norm ab?

3. Aufgabe (2 Punkte (1.5 + 0.5))

Sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r \in (0, 1),\ \varphi \in (0, \omega)\}$.



Die Funktion $u(x, y) = r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(\frac{\pi}{\omega}\varphi)$ ist die klassische Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad x \in \Omega \\ u &= 0 \quad x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ u &= \sin(\frac{\pi}{\omega}\varphi) \quad x \in \Gamma_3. \end{aligned}$$

a) Für welche ω ist $u \in H^2(\Omega)$?

b) Hat Ω einen Lipschitz-Rand?