Der optimale Freiwurf?

Fuad Göze & Mazlum Dogan

21. Dezember 2007
WS 2007/08

Institut für Mathematik
Technische Universität Berlin

Identifizierung & Überlegungen

Wie geht's los?

- beginnend eine einfache Modellierung
- keine Komplexitäten

Identifizierung & Überlegungen

Wie geht's los?

- beginnend eine einfache Modellierung
- keine Komplexitäten
- anschließend Verfeinerung (realitätsnahe Beschreibung)

Identifizierung & Überlegungen

Wie geht's los?

- beginnend eine einfache Modellierung
- keine Komplexitäten
- anschließend Verfeinerung (realitätsnahe Beschreibung)

Identifizierung & Überlegungen

Wie geht's los?

- beginnend eine einfache Modellierung
- keine Komplexitäten
- anschließend Verfeinerung (realitätsnahe Beschreibung)

Beobachtung & Identifizierung

- Wurf erfolgreich trotz Fehler

Identifizierung & Überlegungen

Wie geht's los?

- beginnend eine einfache Modellierung
- keine Komplexitäten
- anschließend Verfeinerung (realitätsnahe Beschreibung)

Beobachtung & Identifizierung

- Wurf erfolgreich trotz Fehler
- plausibel: Abhängigkeit vom **Abwurfwinkel**

Identifizierung & Überlegungen

Wie geht's los?

- beginnend eine einfache Modellierung
- keine Komplexitäten
- anschließend Verfeinerung (realitätsnahe Beschreibung)

Beobachtung & Identifizierung

- Wurf erfolgreich trotz Fehler
- plausibel: Abhängigkeit vom **Abwurfwinkel**

Identifizierung & Überlegungen

Wie geht's los?

- beginnend eine einfache Modellierung
- keine Komplexitäten
- anschließend Verfeinerung (realitätsnahe Beschreibung)

Beobachtung & Identifizierung

- Wurf erfolgreich trotz Fehler
- plausibel: Abhängigkeit vom **Abwurfwinkel**

Gegeben sei ein Spieler bestimmter Größe.

Identifizierung & Überlegungen

Wie geht's los?

- beginnend eine einfache Modellierung
- keine Komplexitäten
- anschließend Verfeinerung (realitätsnahe Beschreibung)

Beobachtung & Identifizierung

- Wurf erfolgreich trotz Fehler
- plausibel: Abhängigkeit vom **Abwurfwinkel**

Gegeben sei ein Spieler bestimmter Größe.

Was ist der beste Abwurfwinkel für einen Treffer?

Identifizierung & Überlegungen

Wie geht's los?

- beginnend eine einfache Modellierung
- keine Komplexitäten
- anschließend Verfeinerung (realitätsnahe Beschreibung)

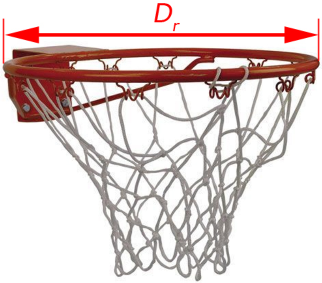
Beobachtung & Identifizierung

- Wurf erfolgreich trotz Fehler
- plausibel: Abhängigkeit vom **Abwurfwinkel**

Gegeben sei ein Spieler bestimmter Größe.
Was ist der beste Abwurfwinkel für einen Treffer?

Beteiligte Konstanten & Variablen

- Ringdurchmesser $D_r = 45\,cm$

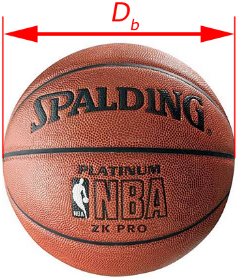


Beteiligte Konstanten & Variablen

- Ringdurchmesser $D_r = 45\,cm$
- Balldurchmesser $D_b = 24\,cm$

Beteiligte Konstanten & Variablen

- Ringdurchmesser $D_r = 45\,cm$
- Balldurchmesser $D_b = 24\,cm$

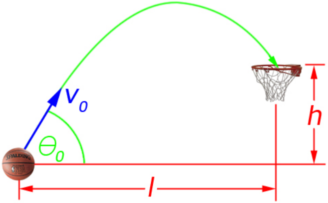


Beteiligte Konstanten & Variablen

- Ringdurchmesser $D_r = 45\,cm$
- Balldurchmesser $D_b = 24\,cm$
- horizontale Distanz $l = 406,5\,cm$
- vertikale Distanz $h = 34,5\,cm$
- Abwurfwinkel θ_0
- Abwurfgeschwindigkeit v_0

Beteiligte Konstanten & Variablen

- Ringdurchmesser $D_r = 45\,cm$
- Balldurchmesser $D_b = 24\,cm$
- horizontale Distanz $l = 406,5\,cm$
- vertikale Distanz $h = 34,5\,cm$
- Abwurfwinkel θ_0
- Abwurfgeschwindigkeit v_0
- Gravitation $g = -9,8\,\frac{m}{s^2}$



Beteiligte Konstanten & Variablen

- Ringdurchmesser $D_r = 45\,cm$
- Balldurchmesser $D_b = 24\,cm$
- horizontale Distanz $l = 406,5\,cm$
- vertikale Distanz $h = 34,5\,cm$
- Abwurfwinkel θ_0
- Abwurfgeschwindigkeit v_0
- Gravitation $g = -9,8\,\frac{m}{s^2}$

Vereinfachte Annahmen

1. Nur „*nearly nothing but net*“-Würfe zulässig
   - Swish-Würfe

Vereinfachte Annahmen

1. Nur „*nearly nothing but net*“-Würfe zulässig
   - Swish-Würfe
   - (hintere Ringkante $\longrightarrow$ in Korb)-Würfe

Vereinfachte Annahmen

1. Nur „*nearly nothing but net*“-Würfe zulässig
   - Swish-Würfe
   - (hintere Ringkante $\longrightarrow$ in Korb)-Würfe
2. kein Luftwiderstand

Vereinfachte Annahmen

1. Nur „*nearly nothing but net*“-Würfe zulässig
   - Swish-Würfe
   - (hintere Ringkante $\longrightarrow$ in Korb)-Würfe
2. kein Luftwiderstand
3. kein Drall (Spin) des Balles

Vereinfachte Annahmen

1. Nur „*nearly nothing but net*"-Würfe zulässig
   - Swish-Würfe
   - (hintere Ringkante $\longrightarrow$ in Korb)-Würfe
2. kein Luftwiderstand
3. kein Drall (Spin) des Balles
4. keine seitlichen Fehler in der Flugbahn

Vereinfachte Annahmen

1. Nur „*nearly nothing but net*“-Würfe zulässig
   - Swish-Würfe
   - (hintere Ringkante $\longrightarrow$ in Korb)-Würfe
2. kein Luftwiderstand
3. kein Drall (Spin) des Balles
4. keine seitlichen Fehler in der Flugbahn
5. kein Fehler in der Abwurfgeschwindigkeit

Vereinfachte Annahmen

1. Nur „*nearly nothing but net*“-Würfe zulässig
   - Swish-Würfe
   - (hintere Ringkante $\longrightarrow$ in Korb)-Würfe
2. kein Luftwiderstand
3. kein Drall (Spin) des Balles
4. keine seitlichen Fehler in der Flugbahn
5. kein Fehler in der Abwurfgeschwindigkeit
6. beste Wurf = Wurf durch die Mitte des Ringes

Vereinfachte Annahmen

1. Nur „*nearly nothing but net*“-Würfe zulässig
   - Swish-Würfe
   - (hintere Ringkante $\longrightarrow$ in Korb)-Würfe
2. kein Luftwiderstand
3. kein Drall (Spin) des Balles
4. keine seitlichen Fehler in der Flugbahn
5. kein Fehler in der Abwurfgeschwindigkeit
6. beste Wurf = Wurf durch die Mitte des Ringes
7. Werfer ist 2,16 m groß (Shaquile O'neal)

Vereinfachte Annahmen

1. Nur „*nearly nothing but net*“-Würfe zulässig
   - Swish-Würfe
   - (hintere Ringkante $\longrightarrow$ in Korb)-Würfe
2. kein Luftwiderstand
3. kein Drall (Spin) des Balles
4. keine seitlichen Fehler in der Flugbahn
5. kein Fehler in der Abwurfgeschwindigkeit
6. beste Wurf = Wurf durch die Mitte des Ringes
7. Werfer ist 2,16 m groß (Shaquile O'neal)

Warm-Up für Mathematische Beziehungen

Was wollen wir?

mathematische Formel, die den Fehler im Abwurfwinkel in Bezug auf die erklärten Variablen beschreibt

Warm-Up für Mathematische Beziehungen

Was wollen wir?

mathematische Formel, die den Fehler im Abwurfwinkel in Bezug auf die erklärten Variablen beschreibt

Was hilft uns?

Projektilbewegungsgleichungen bzw. das 2. Newton'sche Gesetz (**Aktionsprinzip**)

Warm-Up für Mathematische Beziehungen

Was wollen wir?

mathematische Formel, die den Fehler im Abwurfwinkel in Bezug auf die erklärten Variablen beschreibt

Was hilft uns?

Projektilbewegungsgleichungen bzw. das 2. Newton'sche Gesetz (**Aktionsprinzip**)

Warm-Up für Mathematische Beziehungen

Was wollen wir?

mathematische Formel, die den Fehler im Abwurfwinkel in Bezug auf die erklärten Variablen beschreibt

Was hilft uns?

Projektilbewegungsgleichungen bzw. das 2. Newton'sche Gesetz (**Aktionsprinzip**)

... und wie?

mittels Aufsplittung in Teilmodelle & Zusammenführung (**Divide & Conquer**)

Warm-Up für Mathematische Beziehungen

Was wollen wir?

mathematische Formel, die den Fehler im Abwurfwinkel in Bezug auf die erklärten Variablen beschreibt

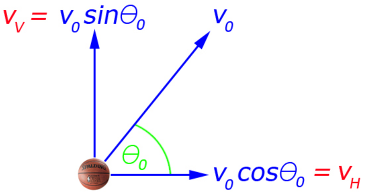
Was hilft uns?

Projektilbewegungsgleichungen bzw. das 2. Newton'sche Gesetz (**Aktionsprinzip**)

. . . und wie?

mittels Aufsplittung in Teilmodelle & Zusammenführung (**Divide & Conquer**)

Es geht ans Eingemachte - Aufsplitten ...

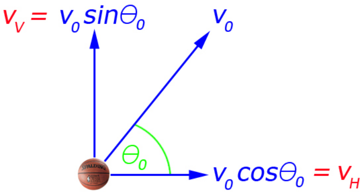


... der Abwurfgeschwindigkeit

- horizontale Komponente:

(1) $$v_H = v_0 \cos \theta_0$$

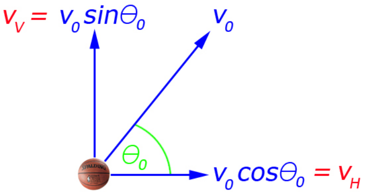
Es geht ans Eingemachte - Aufsplitten ...



... der Abwurfgeschwindigkeit

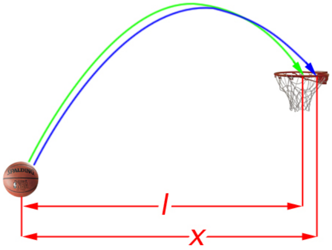
- horizontale Komponente:
  (1) $v_H = v_0 \cos \theta_0$
- vertikale Komponente:
  (2) $v_V = v_0 \sin \theta_0$

Es geht ans Eingemachte - Aufsplitten . . .



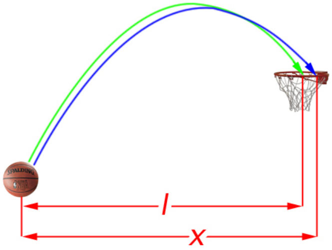
. . . der Abwurfgeschwindigkeit

- horizontale Komponente:
  (1) $v_H = v_0 \cos\theta_0$
- vertikale Komponente:
  (2) $v_V = v_0 \sin\theta_0$



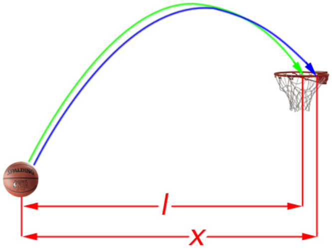
... und des Weges

- horizontal (**gleichf. Bewegung**):
  (3) $x(t) = v_0 \cos(\theta_0) t$
  bzw. mit $x(T) = l$
  $\Rightarrow \quad l = v_0 \cos(\theta_0) T$



... und des Weges

- horizontal (**gleichf. Bewegung**):
  (3) $x(t) = v_0 \cos(\theta_0) t$
  bzw. mit $x(T) = l$
  $\Rightarrow \quad l = v_0 \cos(\theta_0) T$
- vertikal (**senkrechter Wurf**):
  (4) $y(t) = vt + \frac{1}{2} g t^2$
  $= v_0 \sin(\theta_0) t + \frac{1}{2} g t^2$
  bzw. mit $y(T) = h$
  $\Rightarrow \quad h = v_0 \sin(\theta_0) T + \frac{1}{2} g T^2$



. . . und des Weges

- horizontal (**gleichf. Bewegung**):
  (3) $x(t) = v_0 \cos(\theta_0) t$
  bzw. mit $x(T) = l$
  $\Rightarrow \quad l = v_0 \cos(\theta_0) T$

- vertikal (**senkrechter Wurf**):
  (4) $y(t) = vt + \frac{1}{2} g t^2$
  $= v_0 \sin(\theta_0) t + \frac{1}{2} g t^2$
  bzw. mit $y(T) = h$
  $\Rightarrow \quad h = v_0 \sin(\theta_0) T + \frac{1}{2} g T^2$

$$(3) \Leftrightarrow (5): \qquad T = \frac{l}{\cos(\theta_0) v_0}$$

$$(5) \curvearrowright (4) \Leftrightarrow (6): \qquad h = l \tan(\theta_0) + \frac{1}{2} g \frac{l^2}{\cos^2(\theta_0) v_0^2}$$

$$(3) \Leftrightarrow (5): \qquad T = \frac{l}{\cos(\theta_0) v_0}$$

$$(5) \curvearrowright (4) \Leftrightarrow (6): \qquad h = l\tan(\theta_0) + \frac{1}{2} g \frac{l^2}{\cos^2(\theta_0) v_0^2}$$

Wir finden die Abwurfgeschwindigkeit v_0 zu gegebenen Abwurfwinkel θ_0, sodass der Ball durch Mitte des Ringes geht:

$$(3) \Leftrightarrow (5): \qquad T = \frac{l}{\cos(\theta_0) v_0}$$

$$(5) \curvearrowright (4) \Leftrightarrow (6): \qquad h = l\tan(\theta_0) + \frac{1}{2} g \frac{l^2}{\cos^2(\theta_0) v_0^2}$$

Wir finden die Abwurfgeschwindigkeit v_0 zu gegebenen Abwurfwinkel θ_0, sodass der Ball durch Mitte des Ringes geht:

$$(6) \Leftrightarrow \quad : \qquad v_0 = \frac{l}{\cos(\theta_0)} \sqrt{\frac{-g}{2(l\tan(\theta_0) - h)}}$$

$$(3) \Leftrightarrow (5): \qquad T = \frac{l}{\cos(\theta_0)v_0}$$

$$(5) \curvearrowright (4) \Leftrightarrow (6): \qquad h = l\tan(\theta_0) + \frac{1}{2}g\frac{l^2}{\cos^2(\theta_0)v_0^2}$$

Wir finden die Abwurfgeschwindigkeit v_0 zu gegebenen Abwurfwinkel θ_0, sodass der Ball durch Mitte des Ringes geht:

$$(6) \Leftrightarrow \quad : \qquad v_0 = \frac{l}{\cos(\theta_0)}\sqrt{\frac{-g}{2(l\tan(\theta_0) - h)}}$$

$\Rightarrow$ möglicher Bereich des Abwurfwinkels: $\arctan(\frac{h}{l}) < \theta_0 < 90°$

$$(3) \Leftrightarrow (5): \qquad T = \frac{l}{\cos(\theta_0) v_0}$$

$$(5) \curvearrowright (4) \Leftrightarrow (6): \qquad h = l\tan(\theta_0) + \frac{1}{2} g \frac{l^2}{\cos^2(\theta_0) v_0^2}$$

Wir finden die Abwurfgeschwindigkeit v_0 zu gegebenen Abwurfwinkel θ_0, sodass der Ball durch Mitte des Ringes geht:

$$(6) \Leftrightarrow \quad : \qquad v_0 = \frac{l}{\cos(\theta_0)} \sqrt{\frac{-g}{2(l\tan(\theta_0) - h)}}$$

$\Rightarrow$ möglicher Bereich des Abwurfwinkels: $\arctan(\frac{h}{l}) < \theta_0 < 90°$

- horizontale Position des Balles auf Höhe des Ringes mit Fehler:

$$x = \frac{v_0 \cos(\theta_0^{oops})}{-g} \left(v_0 \sin(\theta_0^{oops}) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta_0^{oops}) + 2gh} \right) \tag{7}$$

- horizontale Position des Balles auf Höhe des Ringes mit Fehler:

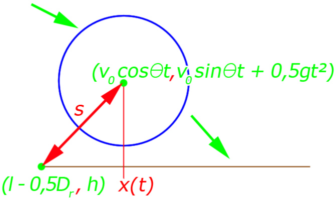
$$x = \frac{v_0 \cos(\theta_0^{oops})}{-g} \left(v_0 \sin(\theta_0^{oops}) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta_0^{oops}) + 2gh} \right) \tag{7}$$

- geht der Ball dennoch durch?

- horizontale Position des Balles auf Höhe des Ringes mit Fehler:

$$x = \frac{v_0 \cos(\theta_0^{oops})}{-g} \left(v_0 \sin(\theta_0^{oops}) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta_0^{oops}) + 2gh} \right) \tag{7}$$

- geht der Ball dennoch durch?



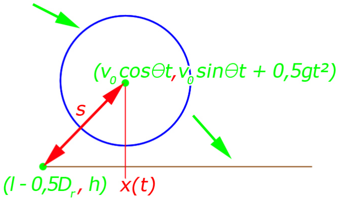
→ mit folgenden Annahmen schon:

$$s^2 > \left(\frac{D_b}{2}\right)^2 \tag{8}$$

- horizontale Position des Balles auf Höhe des Ringes mit Fehler:

$$x = \frac{v_0 \cos(\theta_0^{oops})}{-g} \left(v_0 \sin(\theta_0^{oops}) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta_0^{oops}) + 2gh} \right) \tag{7}$$

- geht der Ball dennoch durch?



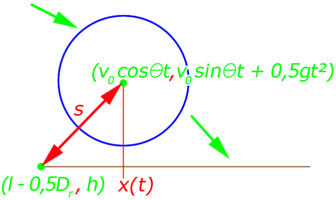
→ mit folgenden Annahmen schon:

$$s^2 > \left(\frac{D_b}{2}\right)^2 \tag{8}$$

- horizontale Position des Balles auf Höhe des Ringes mit Fehler:

$$x = \frac{v_0 \cos(\theta_0^{oops})}{-g} \left(v_0 \sin(\theta_0^{oops}) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta_0^{oops}) + 2gh} \right) \tag{7}$$

- geht der Ball dennoch durch?



→ mit folgenden Annahmen schon:

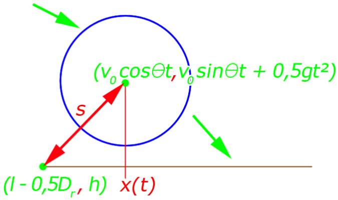
$$s^2 > \left(\frac{D_b}{2}\right)^2 \tag{8}$$

$$x + \frac{D_b}{2} = l + \frac{D_r}{2} \tag{9}$$

- horizontale Position des Balles auf Höhe des Ringes mit Fehler:

$$x = \frac{v_0 \cos(\theta_0^{oops})}{-g} \left(v_0 \sin(\theta_0^{oops}) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta_0^{oops}) + 2gh} \right) \tag{7}$$

- geht der Ball dennoch durch?



→ mit folgenden Annahmen schon:

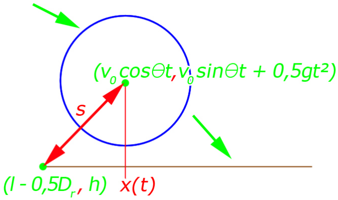
$$s^2 > \left(\frac{D_b}{2}\right)^2 \tag{8}$$

$$x + \frac{D_b}{2} = l + \frac{D_r}{2} \tag{9}$$

- horizontale Position des Balles auf Höhe des Ringes mit Fehler:

$$x = \frac{v_0 \cos(\theta_0^{oops})}{-g} \left(v_0 \sin(\theta_0^{oops}) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta_0^{oops}) + 2gh} \right) \tag{7}$$

- geht der Ball dennoch durch?



→ mit folgenden Annahmen schon:

$$s^2 > \left(\frac{D_b}{2}\right)^2 \tag{8}$$

$$x + \frac{D_b}{2} = l + \frac{D_r}{2} \tag{9}$$

. . . und die Lösung . . .

Um erlaubten Fehler in θ_0 zu finden, halten wir v_0 fest.

$\theta_{low} < \theta_0$ und $\theta_{high} > \theta_0$ numerische Lösungen von:

...und die Lösung ...

Um erlaubten Fehler in θ_0 zu finden, halten wir v_0 fest.
$\theta_{low} < \theta_0$ und $\theta_{high} > \theta_0$ numerische Lösungen von:

$$(8) \Rightarrow (10): \qquad s^2 - \left(\frac{D_b}{2}\right)^2 = 0$$

$$(9) \Leftrightarrow (11): \qquad x - l + \frac{D_b - D_r}{2} = 0$$

Auflösen nach θ_{low}, θ_{high} erhalten wir minimale Abweichung von θ_0:

$$\epsilon(\theta_0) = \min(\theta_{high} - \theta_0, \theta_0 - \theta_{low})$$

. . . und die Lösung . . .

Um erlaubten Fehler in θ_0 zu finden, halten wir v_0 fest.
$\theta_{low} < \theta_0$ und $\theta_{high} > \theta_0$ numerische Lösungen von:

$$(8) \Rightarrow (10): \qquad s^2 - \left(\frac{D_b}{2}\right)^2 = 0$$

$$(9) \Leftrightarrow (11): \qquad x - l + \frac{D_b - D_r}{2} = 0$$

Auflösen nach θ_{low}, θ_{high} erhalten wir minimale Abweichung von θ_0:

$$\epsilon(\theta_0) = \min(\theta_{high} - \theta_0, \theta_0 - \theta_{low})$$

. . . und die Lösung . . .

Um erlaubten Fehler in θ_0 zu finden, halten wir v_0 fest.
$\theta_{low} < \theta_0$ und $\theta_{high} > \theta_0$ numerische Lösungen von:

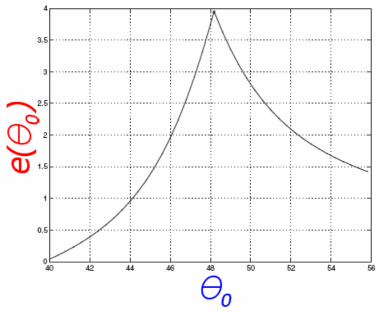
$$(8) \Rightarrow (10): \qquad s^2 - \left(\frac{D_b}{2}\right)^2 = 0$$

$$(9) \Leftrightarrow (11): \qquad x - l + \frac{D_b - D_r}{2} = 0$$

Auflösen nach θ_{low}, θ_{high} erhalten wir minimale Abweichung von θ_0:

$$\epsilon(\theta_0) = \min(\theta_{high} - \theta_0, \theta_0 - \theta_{low})$$

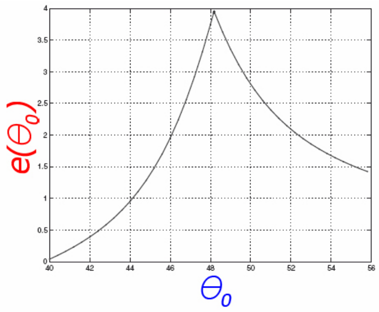
. . . mit dem Problem



Nicht-Differenzierbarkeit

$\Rightarrow$ numerische Methoden notwendig und liefern:

. . . mit dem Problem



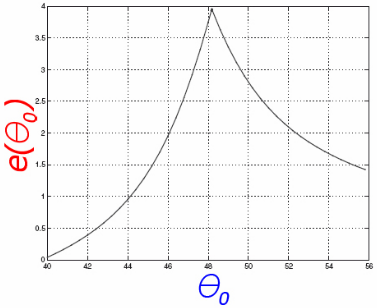
Nicht-Differenzierbarkeit

$\Rightarrow$ numerische Methoden notwendig und liefern:

$$\theta^*_{center} = 48,18^\circ$$

$$v^*_{center} = 6,62\,\frac{m}{s}$$

...mit dem Problem



Nicht-Differenzierbarkeit

$\Rightarrow$ numerische Methoden notwendig und liefern:

$$\theta^*_{center} = 48,18^\circ$$

$$v^*_{center} = 6,62\,\frac{m}{s}$$

War's das schon?

Interpretation

- ist der beste Winkel für Shaq gefunden?

War's das schon?

Interpretation

- ist der beste Winkel für Shaq gefunden?
  $\Rightarrow$ ja, aber bedingt auf **Geschwindigkeitskontrolle**

War's das schon?

Interpretation

- ist der beste Winkel für Shaq gefunden?
  $\Rightarrow$ ja, aber bedingt auf **Geschwindigkeitskontrolle**
  $\Rightarrow$ doch dies ist nicht realistisch

War's das schon?

Interpretation

- ist der beste Winkel für Shaq gefunden?
  $\Rightarrow$ ja, aber bedingt auf **Geschwindigkeitskontrolle**
  $\Rightarrow$ doch dies ist nicht realistisch
- daher Winkel verwerfen und Modell **verfeinern**

War's das schon?

Interpretation

- ist der beste Winkel für Shaq gefunden?
  $\Rightarrow$ ja, aber bedingt auf **Geschwindigkeitskontrolle**
  $\Rightarrow$ doch dies ist nicht realistisch
- daher Winkel verwerfen und Modell **verfeinern**

War's das schon?

Interpretation

- ist der beste Winkel für Shaq gefunden?
  $\Rightarrow$ ja, aber bedingt auf **Geschwindigkeitskontrolle**
  $\Rightarrow$ doch dies ist nicht realistisch
- daher Winkel verwerfen und Modell **verfeinern**

Verfeinerung

- verwerfen hierzu Annahme, dass Ball durch Mitte gehen muss

War's das schon?

Interpretation

- ist der beste Winkel für Shaq gefunden?
  $\Rightarrow$ ja, aber bedingt auf **Geschwindigkeitskontrolle**
  $\Rightarrow$ doch dies ist nicht realistisch
- daher Winkel verwerfen und Modell **verfeinern**

Verfeinerung

- verwerfen hierzu Annahme, dass Ball durch Mitte gehen muss
- dadurch wieder zurück im zyklischen Modellierungsprozess

War's das schon?

Interpretation

- ist der beste Winkel für Shaq gefunden?
  $\Rightarrow$ ja, aber bedingt auf **Geschwindigkeitskontrolle**
  $\Rightarrow$ doch dies ist nicht realistisch
- daher Winkel verwerfen und Modell **verfeinern**

Verfeinerung

- verwerfen hierzu Annahme, dass Ball durch Mitte gehen muss
- dadurch wieder zurück im zyklischen Modellierungsprozess

Ist die Mitte optimal?

Wir behalten bei ...

- Bewegungsgleichungen

Ist die Mitte optimal?

Wir behalten bei ...

- Bewegungsgleichungen
- Spielergröße (216 cm)

Ist die Mitte optimal?

Wir behalten bei ...

- Bewegungsgleichungen
- Spielergröße (216 cm)

Ist die Mitte optimal?

Wir behalten bei . . .

- Bewegungsgleichungen
- Spielergröße (216 cm)

Aber nun . . .

lassen wir die Abwurfgeschwindigkeit v_0

Ist die Mitte optimal?

Wir behalten bei ...

- Bewegungsgleichungen
- Spielergröße (216 cm)

Aber nun ...

lassen wir die Abwurfgeschwindigkeit v_0 und den Abwurfwinkel θ_0

Ist die Mitte optimal?

Wir behalten bei ...

- Bewegungsgleichungen
- Spielergröße (216 cm)

Aber nun ...

lassen wir die Abwurfgeschwindigkeit v_0 und den Abwurfwinkel θ_0 unabhängig voneinander zur selben Zeit variieren

Ist die Mitte optimal?

Wir behalten bei ...

- Bewegungsgleichungen
- Spielergröße (216 cm)

Aber nun ...

lassen wir die Abwurfgeschwindigkeit v_0 und den Abwurfwinkel θ_0 unabhängig voneinander zur selben Zeit variieren

Erkenntnisse aus der Numerik: ...

- Annahme (Wurf durch die Mitte) ist nicht optimal

Ist die Mitte optimal?

Wir behalten bei . . .

- Bewegungsgleichungen
- Spielergröße (216 cm)

Aber nun . . .

lassen wir die Abwurfgeschwindigkeit v_0 und den Abwurfwinkel θ_0 unabhängig voneinander zur selben Zeit variieren

Erkenntnisse aus der Numerik: . . .

- Annahme (Wurf durch die Mitte) ist nicht optimal

Ist die Mitte optimal?

Wir behalten bei ...

- Bewegungsgleichungen
- Spielergröße (216 cm)

Aber nun ...

lassen wir die Abwurfgeschwindigkeit v_0 und den Abwurfwinkel θ_0 unabhängig voneinander zur selben Zeit variieren

Erkenntnisse aus der Numerik: ...

- Annahme (Wurf durch die Mitte) ist nicht optimal
- Wurf hängt vom Individuum und Art seines Werfens ab

Ist die Mitte optimal?

Wir behalten bei ...

- Bewegungsgleichungen
- Spielergröße (216 cm)

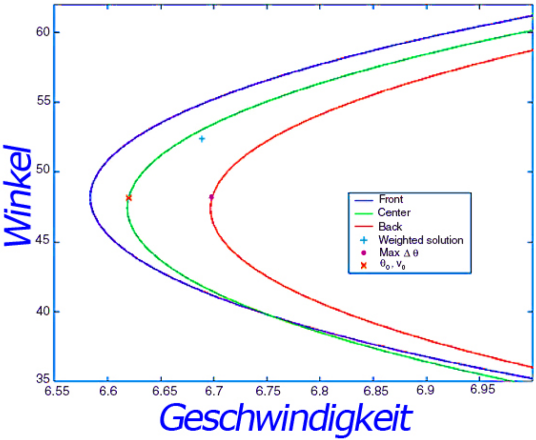
Aber nun ...

lassen wir die Abwurfgeschwindigkeit v_0 und den Abwurfwinkel θ_0 unabhängig voneinander zur selben Zeit variieren

Erkenntnisse aus der Numerik: ...

- Annahme (Wurf durch die Mitte) ist nicht optimal
- Wurf hängt vom Individuum und Art seines Werfens ab

Die ersten Erkentnisse . . .



. . . lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert,

...lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie,

. . . lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler in Geschwindigkeit erlaubt

...lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler in Geschwindigkeit erlaubt
2. die Trajektorie, die erlaubten Fehler in Geschwindigkeit maximiert,

...lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler in Geschwindigkeit erlaubt
2. die Trajektorie, die erlaubten Fehler in Geschwindigkeit maximiert,

. . . lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler in Geschwindigkeit erlaubt
2. die Trajektorie, die erlaubten Fehler in Geschwindigkeit maximiert, ist die Trajektorie,

. . . lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler in Geschwindigkeit erlaubt
2. die Trajektorie, die erlaubten Fehler in Geschwindigkeit maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler im Winkel erlaubt

. . . lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler in Geschwindigkeit erlaubt
2. die Trajektorie, die erlaubten Fehler in Geschwindigkeit maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler im Winkel erlaubt
3. der beste Winkel aus dem ersten Modell

. . . lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler in Geschwindigkeit erlaubt
2. die Trajektorie, die erlaubten Fehler in Geschwindigkeit maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler im Winkel erlaubt
3. der beste Winkel aus dem ersten Modell

...lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler in Geschwindigkeit erlaubt
2. die Trajektorie, die erlaubten Fehler in Geschwindigkeit maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler im Winkel erlaubt
3. der beste Winkel aus dem ersten Modell lässt einen **kleinen Raum zum Unterschreiten** beim Wurf zu

...lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler in Geschwindigkeit erlaubt
2. die Trajektorie, die erlaubten Fehler in Geschwindigkeit maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler im Winkel erlaubt
3. der beste Winkel aus dem ersten Modell lässt einen **kleinen Raum zum Unterschreiten** beim Wurf zu (Problem vieler Spieler)

...lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler in Geschwindigkeit erlaubt
2. die Trajektorie, die erlaubten Fehler in Geschwindigkeit maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler im Winkel erlaubt
3. der beste Winkel aus dem ersten Modell lässt einen **kleinen Raum zum Unterschreiten** beim Wurf zu (Problem vieler Spieler) $\Rightarrow$ beste Wurf $\neq$ Wurf durch die Mitte

...lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler in Geschwindigkeit erlaubt
2. die Trajektorie, die erlaubten Fehler in Geschwindigkeit maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler im Winkel erlaubt
3. der beste Winkel aus dem ersten Modell lässt einen **kleinen Raum zum Unterschreiten** beim Wurf zu (Problem vieler Spieler) $\Rightarrow$ beste Wurf $\neq$ Wurf durch die Mitte

. . . lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler in Geschwindigkeit erlaubt
2. die Trajektorie, die erlaubten Fehler in Geschwindigkeit maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler im Winkel erlaubt
3. der beste Winkel aus dem ersten Modell lässt einen **kleinen Raum zum Unterschreiten** beim Wurf zu (Problem vieler Spieler) $\Rightarrow$ beste Wurf $\neq$ Wurf durch die Mitte

gewichtete Optimal-Werte:

$$\theta^*_{percent} \approx 52,37^\circ \qquad v^*_{percent} \approx 6,7\,\frac{m}{s}$$

...lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler in Geschwindigkeit erlaubt
2. die Trajektorie, die erlaubten Fehler in Geschwindigkeit maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler im Winkel erlaubt
3. der beste Winkel aus dem ersten Modell lässt einen **kleinen Raum zum Unterschreiten** beim Wurf zu (Problem vieler Spieler) $\Rightarrow$ beste Wurf $\neq$ Wurf durch die Mitte

gewichtete Optimal-Werte:

$$\theta^*_{percent} \approx 52,37^\circ \qquad v^*_{percent} \approx 6,7\,\frac{m}{s}$$

Es ist viel wichtiger die richtige Geschwindigkeit zu nutzen

. . . lauten wie folgt:

1. die Trajektorie, die erlaubten Fehler im Winkel maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler in Geschwindigkeit erlaubt
2. die Trajektorie, die erlaubten Fehler in Geschwindigkeit maximiert, ist die Trajektorie, die keinen Fehler im Winkel erlaubt
3. der beste Winkel aus dem ersten Modell lässt einen **kleinen Raum zum Unterschreiten** beim Wurf zu (Problem vieler Spieler) $\Rightarrow$ beste Wurf $\neq$ Wurf durch die Mitte

gewichtete Optimal-Werte:

$$\theta^*_{percent} \approx 52,37^\circ \qquad v^*_{percent} \approx 6,7\,\frac{m}{s}$$

Es ist viel wichtiger die richtige Geschwindigkeit zu nutzen

Oh, der Ball muss kämpfen . . .

- durch Luftwiderstand entsteht Reibungskraft (wirkt entgegen Flugrichtung):

$$F_{viscous} = kv = 3\pi\mu D_b v \tag{12}$$

Oh, der Ball muss kämpfen ...

- durch Luftwiderstand entsteht Reibungskraft (wirkt entgegen Flugrichtung):

$$F_{viscous} = kv = 3\pi\mu D_b v \tag{12}$$

- mit Viskosität der Luft $\mu = 1,877 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms}$

Oh, der Ball muss kämpfen ...

- durch Luftwiderstand entsteht Reibungskraft (wirkt entgegen Flugrichtung):

$$F_{viscous} = kv = 3\pi\mu D_b v \tag{12}$$

- mit Viskosität der Luft $\mu = 1,877 \cdot 10^{-5}\,\frac{kg}{ms}$

$$\Rightarrow \quad k = 4,16 \cdot 10^{-5}\,\frac{kg}{s}$$

Oh, der Ball muss kämpfen ...

- durch Luftwiderstand entsteht Reibungskraft (wirkt entgegen Flugrichtung):

$$F_{viscous} = kv = 3\pi\mu D_b v \tag{12}$$

- mit Viskosität der Luft $\mu = 1,877 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms}$
$$\Rightarrow \ k = 4,16 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{s}$$

Oh, der Ball muss kämpfen ...

- durch Luftwiderstand entsteht Reibungskraft (wirkt entgegen Flugrichtung):

$$F_{viscous} = kv = 3\pi\mu D_b v \tag{12}$$

- mit Viskosität der Luft $\mu = 1,877 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms}$
$\Rightarrow \; k = 4,16 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{s}$

Verbesserte Bewegungsgleichungen durch Newton ($F = m \cdot a$)

- horizontale Bewegungsgleichung:
(13) $m\frac{\partial v_H}{\partial t} = -kv_H$

Oh, der Ball muss kämpfen ...

- durch Luftwiderstand entsteht Reibungskraft (wirkt entgegen Flugrichtung):

$$F_{viscous} = kv = 3\pi\mu D_b v \tag{12}$$

- mit Viskosität der Luft $\mu = 1,877 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms}$
$\Rightarrow \ k = 4,16 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{s}$

Verbesserte Bewegungsgleichungen durch Newton ($F = m \cdot a$)

- horizontale Bewegungsgleichung:
(13) $m\frac{\partial v_H}{\partial t} = -kv_H$

Oh, der Ball muss kämpfen ...

- durch Luftwiderstand entsteht Reibungskraft (wirkt entgegen Flugrichtung):

$$F_{viscous} = kv = 3\pi\mu D_b v \tag{12}$$

- mit Viskosität der Luft $\mu = 1,877 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms}$
  $\Rightarrow \; k = 4,16 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{s}$

Verbesserte Bewegungsgleichungen durch Newton ($F = m \cdot a$)

- horizontale Bewegungsgleichung:
  (13) $m\frac{\partial v_H}{\partial t} = -kv_H$
- vertikale Bewegungsgleichung:
  (14) $m\frac{\partial v_V}{\partial t} = mg - kv_V$

Oh, der Ball muss kämpfen ...

- durch Luftwiderstand entsteht Reibungskraft (wirkt entgegen Flugrichtung):

$$F_{viscous} = kv = 3\pi\mu D_b v \qquad (12)$$

- mit Viskosität der Luft $\mu = 1,877 \cdot 10^{-5}\frac{kg}{ms}$
  $\Rightarrow\ k = 4,16 \cdot 10^{-5}\frac{kg}{s}$

Verbesserte Bewegungsgleichungen durch Newton ($F = m \cdot a$)

- horizontale Bewegungsgleichung:
  (13) $m\frac{\partial v_H}{\partial t} = -kv_H$
- vertikale Bewegungsgleichung:
  (14) $m\frac{\partial v_V}{\partial t} = mg - kv_V$

Vielen Dank . . .

. . . für Eure Aufmerksamkeit.

Vielen Dank . . .

. . . für Eure Aufmerksamkeit.

. . . noch irgendwelche Fragen?

Vielen Dank ...

... für Eure Aufmerksamkeit.

... noch irgendwelche Fragen?

Nein? So wünschen wir allen Zuhörern ein frohes Weihnachtsfest.

Vielen Dank ...

...für Eure Aufmerksamkeit.

...noch irgendwelche Fragen?
Nein? So wünschen wir allen Zuhörern ein frohes Weihnachtsfest.