Modellierung von Lawinenbewegungen
Die Savage-Hutter-Gleichungen

Lars Lubkoll

14. Dezember 2007

Inhaltsverzeichnis

Die Savage-Hutter-Gleichungen

Gleichungen (I)

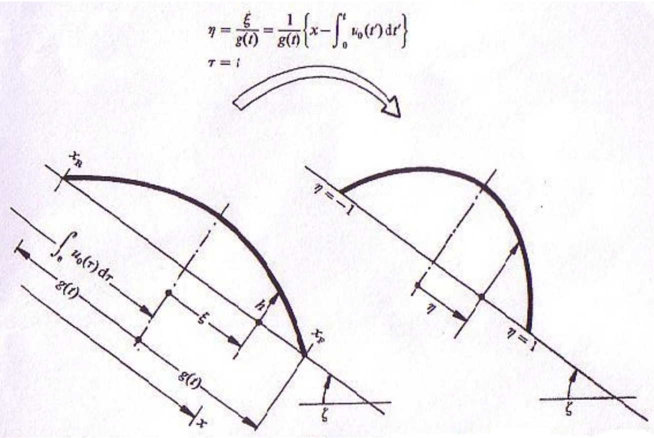
$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{h}\bar{u}) = 0$$
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = (sin\zeta - tan\delta sgn(\bar{u})cos\zeta) - \beta\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}$$

$$\beta = \epsilon k_{actpass} cos\zeta$$

Randbedingungen

$$h(x,t) = h_F \quad x = x_F(t)$$
$$h(x,t) = h_R \quad x = x_R(t)$$

neues Koordinatensystem



neues Koordinatensystem

Ortskoordinate und relative Geschwindigkeit

$\eta = x - \frac{\xi}{g(t)}$
$\tilde{u} = u - u_0(t)$

$\xi = x - \int_0^t u_0(t')dt'$
$u_0(t) = \int_0^t (sin\zeta - tan\delta cos\zeta)dt'$

Annahmen

$h(\xi, t) = h(-\xi, t)$ (Höhe achsensymmetrisch bzgl. $\xi = 0$)
$\tilde{u}(\xi, t) = -\tilde{u}(-\xi, t)$ (rel. Geschw. schiefsymm. bzgl. $\xi = 0$)

Savage-Hutter-Gleichungen in neuen Koordinaten

transformierte Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \left(\eta \frac{\dot{g}}{g} + \frac{u_0}{g}\right) \frac{\partial}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Gleichungen (II) ((I) transformiert, $t = \tau$)

(a) $\frac{\partial h}{\partial t} - \eta \frac{\dot{g}}{g} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \eta}(h\tilde{u}) = 0$

(b) $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \eta \frac{\dot{g}}{g} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{1}{g}(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\eta} + \beta \frac{\partial h}{\partial \eta}) = 0$

Inhaltsverzeichnis

Ansatz

Wähle Ansatz $\tilde{u}(\eta, t) = \eta g'(t)$

Eingesetzt in (II)(b):
$\frac{\partial h}{\partial \eta} = -\frac{g\ddot{g}}{\beta}\eta$
Integration unter Berücksichtigung der RB $h(\eta = \pm 1) = 0$ ergibt:
$h = \frac{g\ddot{g}}{2\beta}(1 - \eta^2)$

Berechnung von g

Aus Massenerhaltung und konst. Dichte folgt:

$$\int_{\xi_R}^{\xi_F} h(\xi,t)d\xi = \int_{-1}^{1} h(\eta,t)g(t)d\eta = M = const.$$

Hieraus ergibt sich nach Vertauschung von abh. und unabh. Variablen die Lösung

$$(g(g-1))^{\frac{1}{2}} + ln|g^{\frac{1}{2}} + (g-1)^{\frac{1}{2}}| = (3\beta M)^{\frac{1}{2}} t$$

Parametric cap solution

Parameterabh. Lösung

$$\tilde{u}(\eta, t) = [\frac{2K}{g}(g-1)]^{\frac{1}{2}}\eta$$
$$h(\eta, t) = \frac{K}{g}(1-\eta^2)$$

$$K = \frac{3\beta M}{2+3d_M}$$

Kontrollgleichung (Konsistenz mit Annahmen):

$$\lim_{t\to 0} \frac{\dot{g}}{u_0} = \frac{2\epsilon k_{actpass} cos\zeta}{sin\zeta - tan\delta cos\zeta} < 1$$

Parametric cap solution

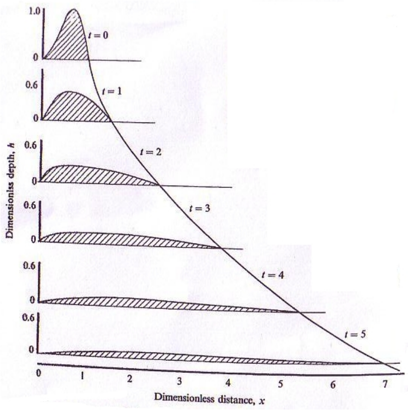
Parameterabh. Lösung für $h(\eta = \pm 1, t) = d_M$:

$$\tilde{u}(\eta, t) = [\frac{2K}{g}(g-1)]^{\frac{1}{2}}\eta$$

$$h(\eta, t) = \frac{K}{g}(1 + d_M - \eta^2)$$

$$K = \frac{3\beta M}{2+3d_M}$$

Parametric cap solution



Bemerkungen

Asymptotisches Verhalten: $t \longrightarrow \infty$

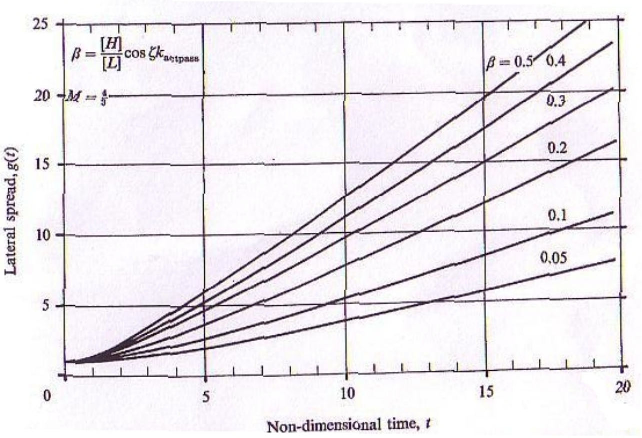
$$\tilde{u} \sim (2K)^{\frac{1}{2}}\eta$$
$$h \sim (\tfrac{K}{2})^{\frac{1}{2}} t^{-1}(d_M + (1 - \eta^2))$$
$$g \sim (2K)^{\frac{1}{2}} t$$

Stabilität

Lösung ist asymptotisch stabil gegenüber Störungen welche g nicht stören

Lösung nur gültig für ϵ hinreichend klein

Parametric cap solution



Inhaltsverzeichnis

Ansatz

Wähle Ansatz

$h(\eta, t) = t^{\gamma} H(\eta)$
$\tilde{u} = t^{\delta} F(\eta)$
$g(t) = t^{\alpha}$

einsetzen in (II) ergibt ein Differentialgleichungssystem, welches für $\gamma = 2\delta$ und $\delta = \alpha - 1$
unabh. von t ist Aus der Massenerhaltung folgt außerdem
$\alpha + \gamma = 0$
$\rightsquigarrow \alpha = \frac{2}{3}, \beta = -\frac{2}{3}, \gamma = -\frac{1}{3}$

M-Welle

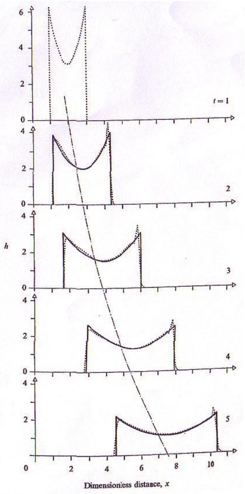
einfache Lösungen für F und H

$$F(\eta) = \frac{2}{3}\eta$$
$$H(\eta) = \frac{1}{g\beta}(dM - (1-\eta^2)), d_M > 1$$

Lösung von (II)

$$\tilde{u}(\eta, t) = \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}\eta$$
$$h(\eta, t) = \frac{1}{g\beta}t^{-\frac{2}{3}}(d_M - (1-\eta^2)), d_M > 1$$
$$g(t) = t^{\frac{2}{3}}$$
$$M = \frac{2}{g\beta}(d_M - \frac{2}{3})$$

M-Welle



Bemerkungen

Stabilität

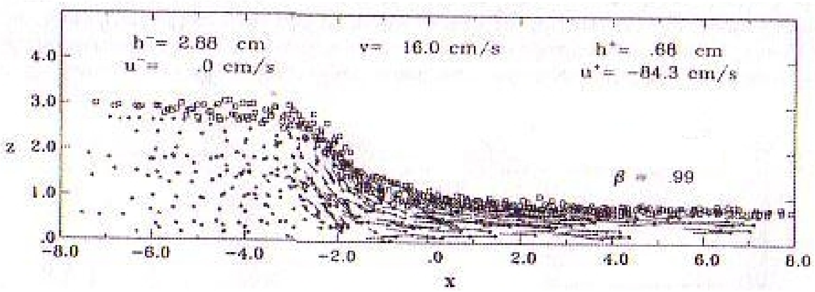
Lösung ist asymptotisch stabil gegenüber Störungen welche g nicht stören

Lösung ist inkonsistent falls t nicht folgende Bedingung erfüllt:

$$t > \left[\frac{2}{3(sin\zeta - tan\delta cos\zeta)}\right]^{\frac{3}{4}}$$

Inhaltsverzeichnis

Schock-Welle



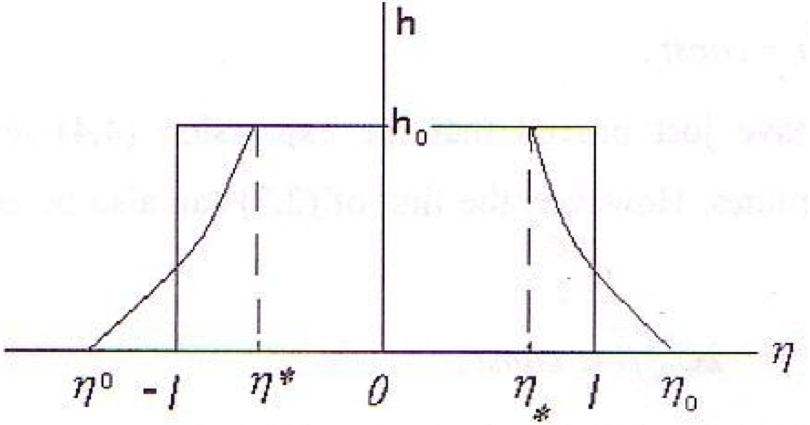
Sprungbedingungen ($\delta = \phi, s = 0$)

$$h_l(u_l - v) - h_r(u_r - v) = 0$$

$$h_l u_l(u_l - v) - h_r u_r(u_r - v) = -\frac{cos\zeta k_{actpass,l} h_l^2}{2} + -\frac{cos\zeta k_{actpass,r} h_r^2}{2}$$

Inhaltsverzeichnis

Ein einfaches Modell



Ein einfaches Modell

beide Grenzen werden gleichzeitig entfernt

$\eta_* < \eta < \eta_0$

$$u = \frac{2}{3}\left(\sqrt{\beta h_0} + \frac{\eta - \lambda}{t}\right)$$
$$h = \frac{1}{9\beta}\left(2\sqrt{\beta h_0} - \frac{\eta - \lambda}{t}\right)^2$$

$\eta^0 > \eta > \eta^*$

$$u = \frac{2}{3}\left(-\sqrt{\beta h_0} + \frac{\eta + \lambda}{t}\right)$$
$$h = \frac{1}{9\beta}\left(2\sqrt{\beta h_0} + \frac{\eta + \lambda}{t}\right)^2$$

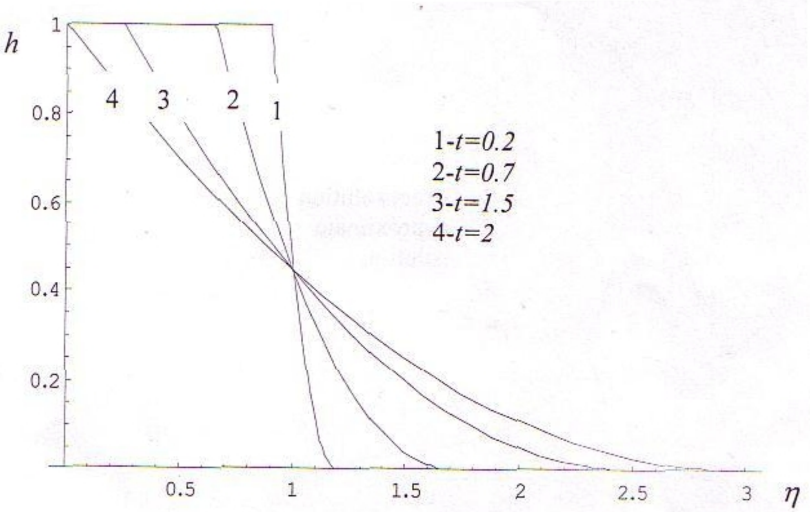
gültig für $t < \frac{\lambda}{\sqrt{\beta h_0}} = \hat{t}$

für $t > \hat{t}$ Berechnung einer exakten Lösung möglich

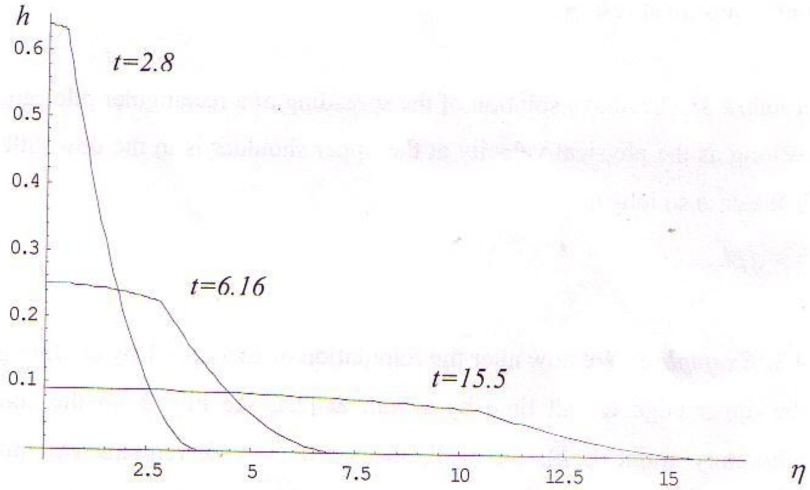
aber numerische Auswertung problematisch

$\rightsquigarrow$ nur Berechnung von Näherungslösungen sinnvoll

Ein einfaches Modell



Ein einfaches Modell



Inhaltsverzeichnis

Konsequenzen für numerische Lösungen

1. auftretende Gradienten werden sehr groß und verursachen numerische Oszillationen
2. am Lawinenende kommt es bei Auslösung und Ablagerung der Lawine zu Bewegungen

Konsequenzen für numerische Lösungen

1. auftretende Gradienten werden sehr groß und verursachen numerische Oszillationen
2. am Lawinenende kommt es bei Auslösung und Ablagerung der Lawine zu Bewegungen entgegengesetzt der Lawinenbewegung
3. Schockwellen treten auf

Konsequenzen für numerische Lösungen

1. auftretende Gradienten werden sehr groß und verursachen numerische Oszillationen
2. am Lawinenende kommt es bei Auslösung und Ablagerung der Lawine zu Bewegungen entgegengesetzt der Lawinenbewegung
3. Schockwellen treten auf

Inhaltsverzeichnis

Quellen

1. Savage, S.B. & Hutter, K. (1989), The motion of a finite mass of granular material down a rough incline, Journal of Fluid Mechanics 199, pp. 177-215
2. V.A. Chugunow, J.M.N.T. Gray, K. Hutter, Exact solutions of the Savage-Hutter equations for one-dimensional granular flows
3. J.M.N.T. Gray, Y.C. Tai, K.Hutter, Shock waves and particle size in shallow granular flows

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!

Fragen?