Chaos in Liebesaffären – und ihre analytische Lösung

Ein Vortrag im Zuge des Modellierungsseminars von Dr. Ehrhardt an der TU Berlin im WS 2007/08

Vorgetragen am 1. Februar 2008 von

Mai Huong Nguyen und Dirk Klindworth

I.	Wiederholung
II.	Analyse des nichtlinearen Modells
II.1	Lösung des vereinfachten Systems
II.2	Lösung des (gestörten) Systems
III.	Interpretation der Lösung

Nach der nichtlinearen mathematischen Formulierung der Gefühle zwischen Laura und Petrarca erfolgt nun im letzten Schritt deren Analyse

Einführung	Modellierung	Analyse
Erster Vortrag ▪ Einführung ▪ Lineare Beispiele ▪ Vorstellung von Laura und Petrarca	**Zweiter Vortrag** ▪ Nichtlineare mathematische Beschreibung der Liebe zwischen Laura und Petrarca ▪ Identifikation und Variation der Parameter ▪ Numerische Lösung im Phasenraum	**Dritter Vortrag** ▪ Analyse der nichtlinearen Differentialgleichungen ▪ Bedingungen für kritische Punkte und Grenzzyklen

Die Gefühle werden mit drei nichtlinearen Gleichungen ausgedrückt, deren numerische Lösung je nach Wahl der Parameter variiert

- Die Gefühle zwischen Laura und Petrarca werden in Rinaldis Modell mit drei Differentialgleichung modelliert
  - Lauras Gefühle:

$$\frac{dL(t)}{dt} = -\alpha_1 L(t) + \beta_1 \left[P(t) \cdot \left(1 - \left(\frac{P(t)}{\gamma} \right)^2 \right) + A_P \right]$$

  - Petrarcas Gefühle:

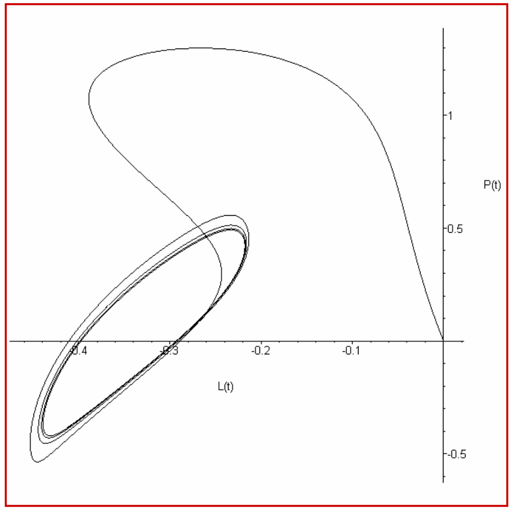
$$\frac{dP(t)}{dt} = -\alpha_2 P(t) + \beta_2 \left(L(t) + \frac{A_L}{1 + \delta Z(t)} \right)$$

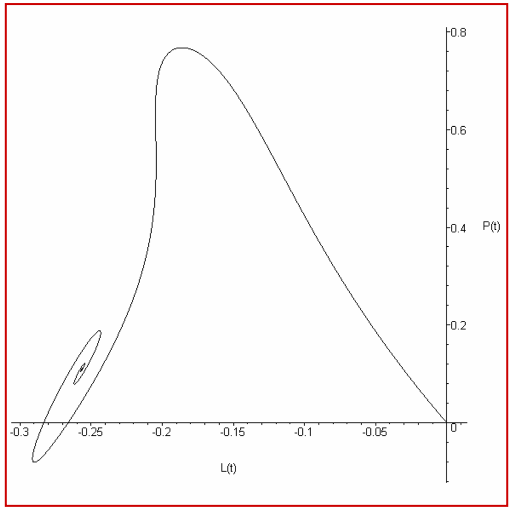
  - Petrarcas dichterische Inspiration:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -\alpha_3 Z(t) + \beta_3 P(t)$$

- Je Nach Wahl der Parameter erhält man bei gleichen Anfangsbedingungen unterschiedliche Ergebnisse

- Es tritt entweder ein Grenzzyklus oder ein Fixpunkt auf





Durch eine Umformulierung des Systems ist die Störungstheorie darauf anwendbar und eine näherungsweise Lösung möglich

- Störungstheorie
  - Bestimmung einer Näherungslösungen eines nicht exakt lösbaren Problems
  - Dazu Überführung des Problems in ein vereinfachtes, exakt lösbares Problem
  - Addition einer Störung, um vom vereinfachten Problem zum nicht exakt lösbaren Problem zu gelangen

- Umformulierung der Inspiration, um die Störungstheorie anwenden zu können

$$\frac{dL(t)}{dt} = -\alpha_1 L(t) + \beta_1 \left[P(t) \cdot \left(1 - \left(\frac{P(t)}{\gamma} \right)^2 \right) + A_P \right]$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\alpha_2 P(t) + \beta_2 \left(L(t) + \frac{A_L}{1 + \delta Z(t)} \right)$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -\alpha_3 Z(t) + \beta_3 P(t) = \varepsilon(-Z + \mu P)$$

- Übergang zum vereinfachten Problem durch die Annahme $\varepsilon = 0$, das heißt:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = 0 \Rightarrow Z = const.$$

Die Anwendung des Dulac Kriteriums zeigt, dass das vereinfachte Problem keine Grenzzyklen besitzt

- Anwendung des Dulac Kriteriums

$$\exists\ A(x,y),\ so\ dass\ \frac{\partial(Af)}{\partial x}+\frac{\partial(Ag)}{\partial y}\neq 0,\ dann\ besitzt\ \begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(x,y)\\ \frac{dy}{dt}=g(x,y)\end{cases}\ keine\ \ periodische\ \ Lösung.$$

- In unserem Fall ergibt sich für $A \equiv 1$

$$\frac{\partial\left(dL/dt\right)}{\partial L}+\frac{\partial\left(dP/dt\right)}{\partial P}=-\alpha_1-\alpha_2<0$$

- Wir wissen also, dass kein Grenzzyklus existiert, und nehmen daher an, es existiere ein stationärer Punkt mit $dL/dt = dP/dt = 0$

- Wir erhalten somit

$$0=-\alpha_1 L+\beta_1\left[P\cdot\left(1-\left(\frac{P}{\gamma}\right)^2\right)+A_P\right]$$

$$0=-\alpha_2 P+\beta_2\left(L+\frac{A_L}{1+\delta Z}\right)$$

Durch die Fixpunktbedingung kann das System in eine einfach zu lösende Gleichung der Variablen P und Z überführt werden

- Durch Elimination von L sowie trennen der Variablen P und Z erhalten wir

  $$\phi(Z) = \psi(P)$$

  mit

  $$\phi(Z) = -\gamma^2\left(A_P + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{A_L}{1+\delta Z}\right)$$

  $$\psi(P) = 3\Delta P - P^3$$

  wobei

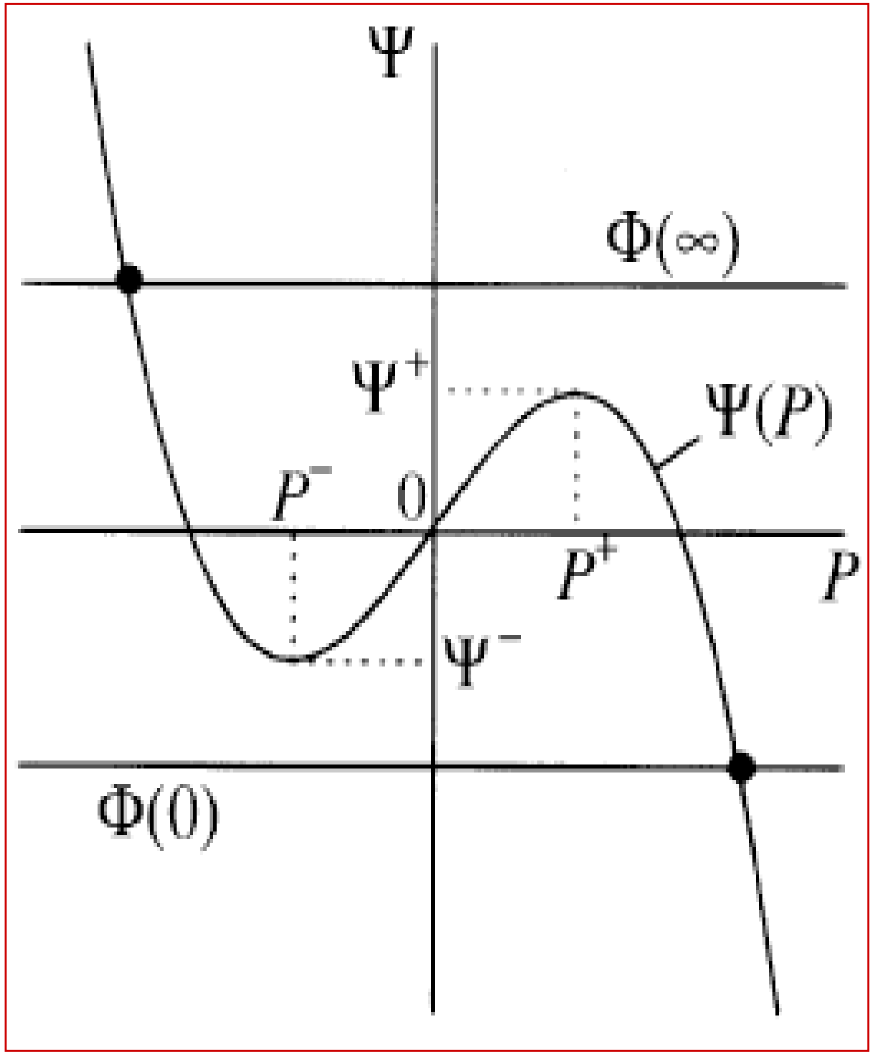
  $$\Delta = \frac{\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2}{3\beta_1\beta_2}\gamma^2$$

- Getroffene Annahmen

  $$\Delta > 0,\ i.e.\ \beta_1\beta_2 > \alpha_1\alpha_2$$

  $$A_P < \frac{2\Delta\sqrt{\Delta}}{\gamma^2}$$

  $$A_L > \frac{\beta_1}{\alpha_1}\left(2\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{\gamma^2} - A_P\right)$$



Für kleine und sehr große Werte der dichterischen Inspiration hat das System einen eindeutigen, stabilen Fixpunkt

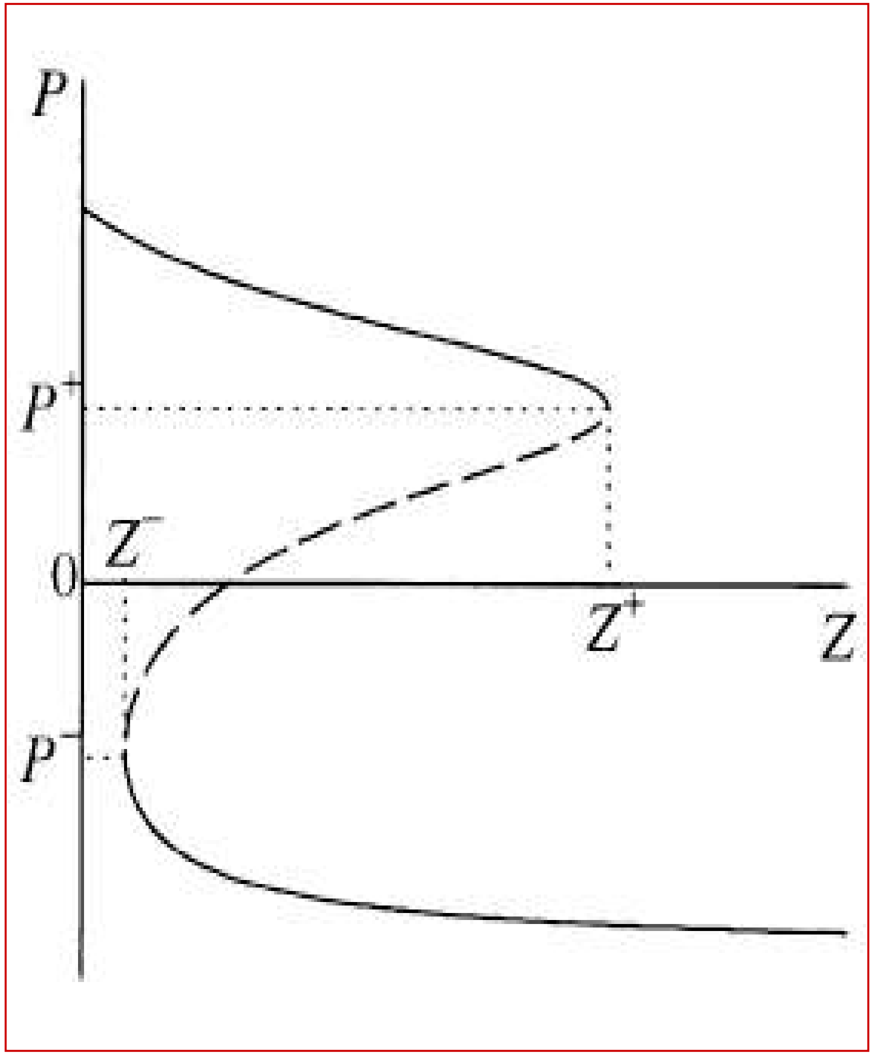
- Unter diesen Annahmen hat das System eine eindeutige
  - positive Lösung P für $0 < Z < Z^-$
  - negative Lösung P für $Z > Z^+$

- Im Intervall $Z^- < Z < Z^+$ hat das System drei Lösungen

- Eine Betrachtung der Eigenwerte der Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \, dL/dt}{\partial L} & \frac{\partial \, dL/dt}{\partial P} \\ \frac{\partial \, dP/dt}{\partial L} & \frac{\partial \, dP/dt}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 \left(1 - 3\left(\frac{P}{\gamma}\right)^2\right) \\ \beta_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$$

zeigt für das Intervall $Z^- < Z < Z^+$, dass
  - die Lösung in den Intervallen $0 < P < P^-$ und $P > P^+$ stabil ist
  - die Lösungen im Intervall $P^- < P < P^+$ instabil sind



Agenda

I.	Wiederholung
II.	Analyse des nichtlinearen Modells
II.1	Lösung des vereinfachten Systems
II.2	Lösung des (gestörten) Systems
III.	Interpretation der Lösung

Bei Wegfall der Annahme $\varepsilon \neq 0$ ist das Dulac Kriterium nicht mehr anwendbar und es entsteht ein Bifurkationspunkt

- Nun wird angenommen, dass $\varepsilon \neq 0$, so dass aus

  $$\frac{dZ(t)}{dt} = \varepsilon(-Z + \mu P) = 0$$

  folgt, dass $Z = \mu P$

- Die Anwendung des Dulac Kriteriums ist nicht mehr möglich, da gelten kann, dass

  $$\frac{\partial(dLdt)}{\partial L} + \frac{\partial(dPdt)}{\partial P} = \frac{-\beta_2 A_L \delta\mu}{(1+\delta\mu P)^2} - \alpha_2 = 0$$

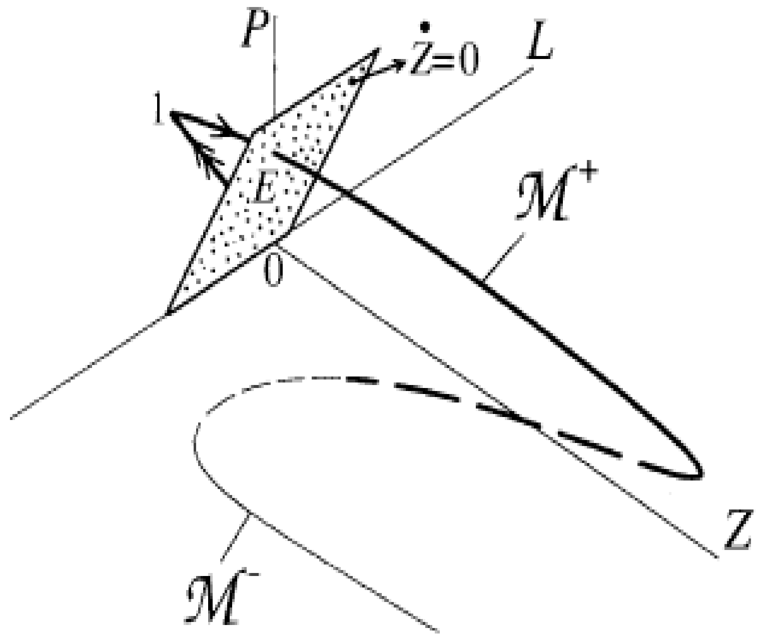
- Es existiert aber ein Bifurkationspunkt μ_{crit},an dem eine abrupte qualitative Veränderung stattfindet

  $$\mu_{crit} = \frac{1}{\delta\sqrt{\Delta}} \frac{\frac{\alpha_1}{\beta_1} A_L + A_P + 2\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{\gamma^2}}{-\left(A_P + 2\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{\gamma^2}\right)}$$

- Aus einem Fixpunkt entsteht ein Grenzzyklus

Für Werte $\mu < \mu_{crit}$ erhält man einen eindeutigen und stabilen Fixpunkt

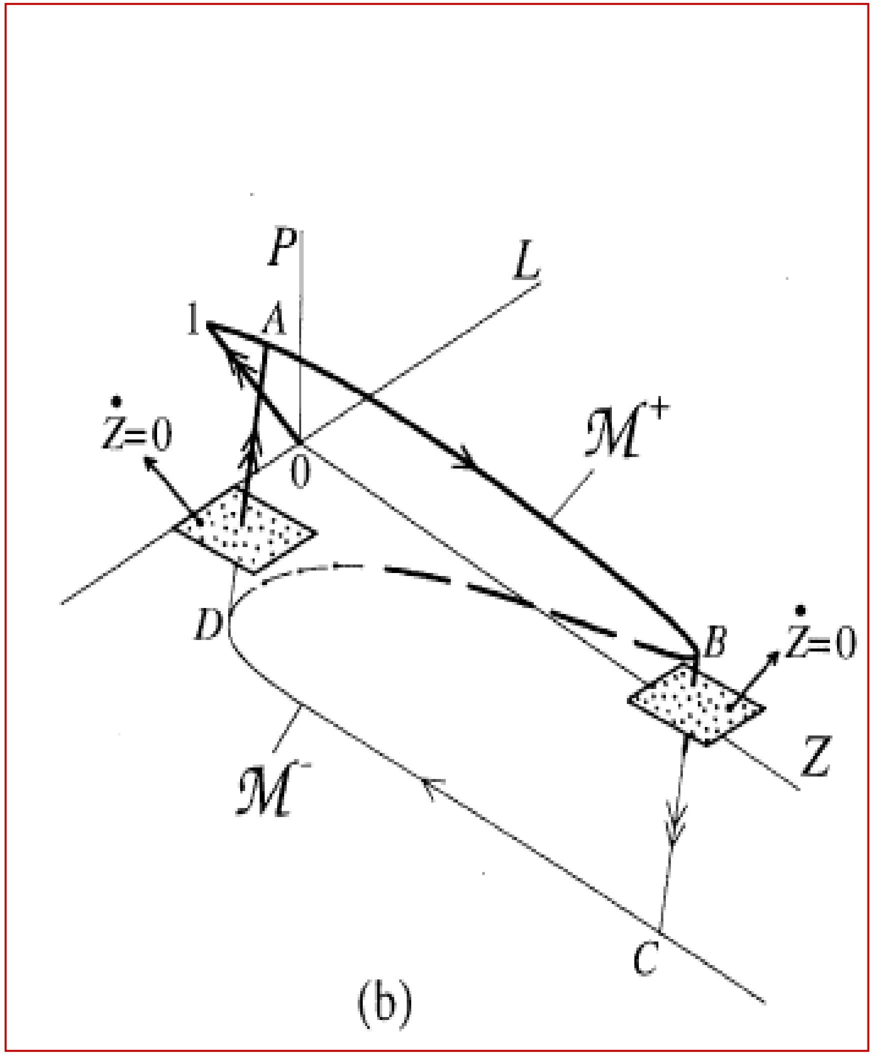
- Für $\mu < \mu_{crit}$ gilt
  - Gewählter Startpunkt: 1
  - Langsame Geschwindigkeit
  - Endpunkt E mit $dL/dt = dP/dt = dZ/dt = 0$
  - Alle Trajektorien, die in der Nähe des gewählten Startpunkts starten, enden in E
- Somit ist E der gesuchte Fixpunkt



(a)

Für Werte $\mu > \mu_{crit}$ erhält man einen Grenzzyklus mit Langsam-schnell-Struktur

- Für $\mu > \mu_{crit}$ gilt
  - Gewählter Startpunkt: 1
  - Langsame Geschwindigkeit
  - Erste “Zwischenstation” beim Bifurkationspunkt B
  - Schnelle Geschwindigkeit
  - Zweite “Zwischenstation” C mit ${}^{dZ}\!/_{dt} < 0$
  - Langsame Geschwindigkeit
  - Dritte “Zwischenstation” D
  - Geschwindigkeit: schnell
  - Endpunkt A
  - Alle in der Nähe des gewählten Startpunkts beginnenden Trajektorien werden von dem Zyklus angesaugt
- Daraus folgt: ABCD ist ein gefundener Grenzzyklus

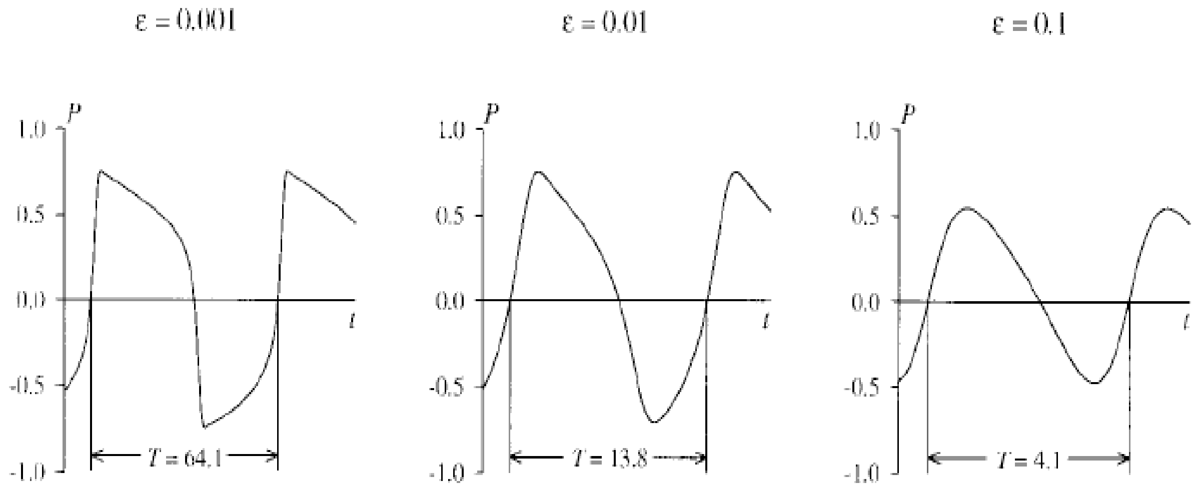


Für große Werte von ε verschwindet der Grenzzyklus durch eine auftretende Hopf Bifurkation

- Für ε hinreichend klein: Langsam-Schnell-Struktur der periodischen Lösungen erkennbar
  - Falls $\mu < \mu_{crit}$: das DGL System hat einen Attraktor als Fixpunkt
  - Falls $\mu > \mu_{crit}$: das DGL System hat einen Attraktor als Grenzzyklus

- Für ε nicht sehr klein: Geschwindigkeit bleibt gleich, Langsam-Schnell-Struktur verschwindet

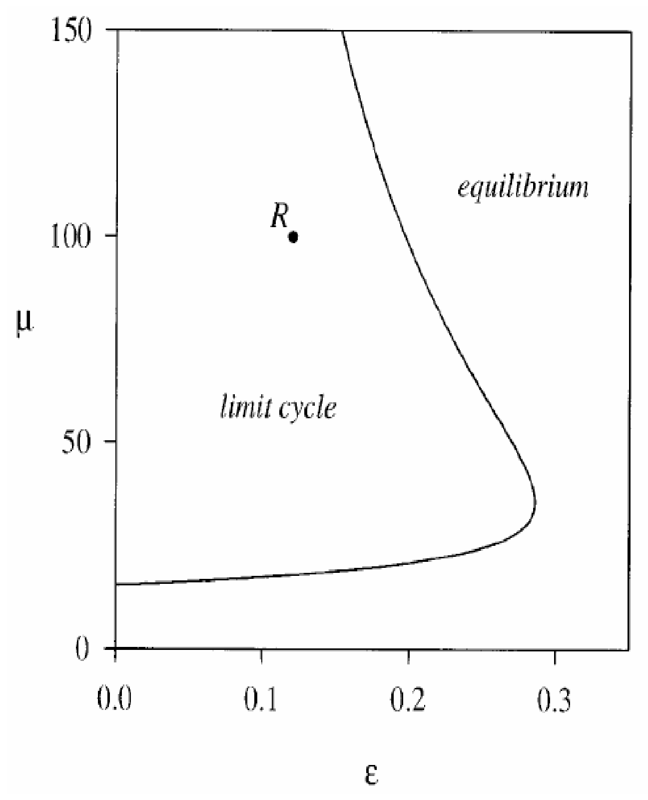
- Für ε groß: Grenzzyklus verschwindet durch eine Hopf Bifurkation



I.	Wiederholung
II.	Analyse des nichtlinearen Modells
II.1	Lösung des vereinfachten Systems
II.2	Lösung des (gestörten) Systems
III.	Interpretation der Lösung

Die Voraussetzungen für einen Grenzzyklus stimmen mit den Fakten der Liebesgeschichte von Laura und Petrarca überein

- Für $\beta_1\beta_2 > \alpha_1\alpha_2$ gilt:
  - im Nullpunkt (P,L)=(0,0) sind alle Ruhelagen des DGL System instabil
  - Deutung: Am Anfang der Beziehung von Laura und Petrarca befindet sich sprunghafte Gefuehle
- Für $A_P < \frac{2\Delta\sqrt{\Delta}}{\gamma^2}$ wirkt der Poet auf Laura nicht anziehend
- Für $A_L > \frac{\beta_1}{\alpha_1}\left(2\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{\gamma^2} - A_P\right)$ wirkt Laura sehr anziehend auf Petraca
- Die Bedingung $\mu > \mu_{crit}$ gibt an:
  - Petraca holt seine dichterische Inspiration aus der Liebe zu Laura
- Schlussfolgerungen:
  - Alle Deutungen der mathematischen Voraussetzungen stimmen mit der Geschichte von Laura und Petraca ueberein
  - Einen Fixpunkt kann es somit nicht geben



Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!

Gibt es noch Fragen?