

Bewertung von europäischen und amerikanischen Optionen

1. Vortrag - Einführung

Claudia Münstermann, Christoph Lilke

Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

8. November 2007

Inhaltsverzeichnis

- 1 Definitionen
 - Option
 - amerikanische / europäische Option
- 2 Wert einer Option
- 3 Ziel
- 4 weitere Definitionen
- 5 Modellvoraussetzungen
- 6 Black-Scholes-Gleichung für europäische Optionen
- 7 amerikanische Optionen

Option

Definition (Option)

Recht, aber nicht die Pflicht,

- zu einem bestimmten Zeitpunkt $t \in [0, T]$
- einen bestimmten Basistitel S
- zu einem bestimmten Ausübungspreis K
- zu kaufen / zu verkaufen
(Kauf-/Verkaufsoption bzw. call/put)

- Hierbei wird mit $S_t := S(t)$ der Kurs des Basiswertes zur Zeit t bezeichnet.

Definitionen

Wert einer Option

Ziel

weitere Definitionen

Modellvoraussetzungen

Black-Scholes-Gleichung für europäische Optionen

amerikanische Optionen

Option

amerikanische / europäische Option

amerikanische / europäische Option

Definition (europäische Option)

Ausübung der Option genau zum Zeitpunkt T

Definition (amerikanische Option)

Ausübung der Option zu einem Zeitpunkt $t \in [0, T]$

Auszahlungsfunktion

Definition (Auszahlungsfunktion)

Wert der Option zum möglichen Ausübungszeitpunkt t
„*payoff*“

Auszahlungsfunktion

Definition (Auszahlungsfunktion)

Wert der Option zum möglichen Ausübungszeitpunkt t
„payoff“

- Payoff für den europäischen Call:

$$C_T = \max\{0, S_T - K\} =: (S_T - K)^+$$

Auszahlungsfunktion

Definition (Auszahlungsfunktion)

Wert der Option zum möglichen Ausübungszeitpunkt t
„payoff“

- Payoff für den europäischen Call:
$$C_T = \max\{0, S_T - K\} =: (S_T - K)^+$$
- Payoff für den europäischen Put:
$$P_T = \max\{0, K - S_T\} =: (K - S_T)^+$$

Wert einer Option

Wert einer Option (Call/Put)

V ... Wert einer Option (Call / Put)

abhängig von:

- Kurs des Basiswertes S_t
- Zeit t

für europäische Optionen gilt zum Zeitpunkt $t = T$:

$$V(S, T) = \begin{cases} (S - K)^+ & \text{Call} \\ (K - S)^+ & \text{Put} \end{cases}$$

Ziel

Ziel

gesucht ist der „*faire Preis*“ einer Option zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$V(S, 0)$$

Portfolio, Arbitrage, Bond

Definition (Portfolio)

Summe von Finanzanlagen wie Aktien, Optionen, Geldanlagen und dergleichen

Definition (Arbitrage)

Möglichkeit, einen *sofortigen*, risikofreien Gewinn zu erzielen

Definition (Bond)

festverzinsliche Anlage zum risikolosen, festen Zinssatz r

Modellvoraussetzungen

Modellvoraussetzungen

folgende vereinfachende Modellannahme an den Finanzmarkt:

- arbitragefreier, liquider, friktionsloser Markt
- vollkommener Kapitalmarkt (Soll- = Habenzins r)
- zeitkontinuierlicher Handel des Basiswerts
- beliebig teilbarer Basiswert
- vollständige Information der Marktteilnehmer

Black-Scholes-Gleichung für *europäische* Optionen

Black-Scholes-Gleichung

der Preis einer *europäischen* Option $V(S, t)$ genügt der partiellen (parabolischen) Differentialgleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

mit

- $0 < S < \infty, 0 < t < T$
- $r > 0 \dots$ Zinssatz
- $\sigma > 0 \dots$ Volatilität

amerikanische Optionen

- keine „geschlossene Formel“ wie *Black-Scholes-Gleichung* vorhanden
- intuitiv: $V_{\text{amerikanisch}}(S, 0) \geq V_{\text{europäisch}}(S, 0)$