Bewertung von europäischen und amerikanischen Optionen

2. Vortrag - mathematische Formulierung: Differentialgleichungen, Randbedingungen, usw.

Claudia Münstermann, Christoph Lilke

Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

7. Dezember 2007

Inhaltsverzeichnis

Modellvoraussetzungen

Modellvoraussetzungen

folgende vereinfachende Modellannahmen an den Finanzmarkt:

- Kurs des Basiswerts $S_t := S(t)$ genügt der stochastischen DGL
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW(t)$$
mit μ ... Drift (Trend), σ ... Volatilität des Basiswerts S_t
- arbitragefreier, liquider, friktionsloser Markt
- vollkommener Kapitalmarkt (Soll- $=$ Habenzins $r \geq 0$)
- zeitkontinuierlicher Handel des Basiswerts
- beliebig teilbarer Basiswert
- keine Dividendenzahlungen auf den Basiswert S
- vollständige Information der Marktteilnehmer

Optionen

innerer Wert einer Option

$$V(S_t, t) = \begin{cases} (S_t - K)^+ =: C_t \dots & \text{Call} \\ (K - S_t)^+ =: P_t \dots & \text{Put} \end{cases}$$

$$(S_t, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$$

Optionen

innerer Wert einer Option

$$V(S_t, t) = \begin{cases} (S_t - K)^+ =: C_t \dots \text{ Call} \\ (K - S_t)^+ =: P_t \dots \text{ Put} \end{cases}$$

$$(S_t, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$$

europäische / amerikanische Option

- Ausübungszeitpunkt $t = T \Rightarrow$ europäische Option
- Ausübungszeitpunkt $t \in (0, T] \Rightarrow$ amerikanische Option

Optionen

innerer Wert einer Option

$$V(S_t, t) = \begin{cases} (S_t - K)^+ =: C_t \dots \text{ Call} \\ (K - S_t)^+ =: P_t \dots \text{ Put} \end{cases}$$

$$(S_t, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$$

europäische / amerikanische Option

- Ausübungszeitpunkt $t = T \Rightarrow$ europäische Option
- Ausübungszeitpunkt $t \in (0, T] \Rightarrow$ amerikanische Option

Ziel

gesucht ist der „*faire Preis*“ einer Option zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$V(S, 0)$$

Black-Scholes-Gleichung (europäische Optionen)

Black-Scholes-Gleichung

der Preis einer europäischen Option $V(S,t)$ genügt der partiellen (parabolischen) Differentialgleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

$$\left(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0\right)$$

mit

- $(S,t) \in (0,\infty) \times (0,T)$
- $r > 0 \ldots$ Zinssatz
- $\sigma > 0 \ldots$ Volatilität

Vorbetrachtungen

Vorbetrachtungen

- Betrachtung der Lösung der Black-Scholes-Gleichung $V(S,t)$ auf der Menge:

$$(S,t) \in (0,\infty) \times (0,T)$$

Vorbetrachtungen

Vorbetrachtungen

- Betrachtung der Lösung der Black-Scholes-Gleichung $V(S,t)$ auf der Menge:

$$(S,t) \in (0,\infty) \times (0,T)$$

- Transformation der Black-Scholes-Gleichung auf eine reine Wärmeleitgleichung möglich:

$$u_t(x,t) = a \cdot u_{xx}(x,t)$$

$\Rightarrow$ Lösbarkeit
(Eindeutigkeit mit gegebenen Anfangs- und Randbedingungen)

Endbedingung

Endbedingung

- Lösung der Black-Scholes-Gleichung rückwärts in der Zeit

$$V(S,T) = \begin{cases} (S-K)^+ =: C(S,T) \\ (K-S)^+ =: P(S,T) \end{cases}$$

$$\forall S \in (0,\infty)$$

allgemein

Randwertbetrachtung

- Betrachtung der beiden Ränder des Definitionsbereiches von S

allgemein

Randwertbetrachtung

- Betrachtung der beiden Ränder des Definitionsbereiches von S
- $S = 0 \Rightarrow V(0, t)$
- $S \longrightarrow \infty \Rightarrow V(S, t)$ für $S \longrightarrow \infty$

europäischer Call

$$C(S,t) = V(S,t)$$

$S = 0$

- „Recht, einen wertlosen Basiswert S zu kaufen“
- $\Rightarrow C(0,t) = 0$
  $\forall t \in (0,T)$

europäischer Call

$$C(S,t) = V(S,t)$$

$S = 0$

- „Recht, einen wertlosen Basiswert S zu kaufen“
- $\Rightarrow C(0,t) = 0$
  $\forall t \in (0, T)$

$S \longrightarrow \infty$

- allgemein: $C(S,t) \approx S - K \cdot e^{-r(T-t)}$
- $C(S,t) \approx S$ für $S \longrightarrow \infty$
- $\Rightarrow C(S,t) \xrightarrow{S \to \infty} \infty$
  $\forall t \in (0, T)$

europäischer Put

$$P(S,t) = V(S,t)$$

$S \longrightarrow \infty$

- „Recht, einen unendlich teuren Basiswert S zu verkaufen"
- $\Rightarrow P(S,t) \xrightarrow{S\to\infty} 0$
  $\forall t \in (0,T)$

europäischer Put

$S = 0$

- über Put-Call-Parität

europäischer Put

$S = 0$

- über Put-Call-Parität

Theorem (Put-Call-Parität)

Unter den Voraussetzungen an den vollkommenen Kapitalmarkt gilt für alle $t \in [0, T]$

$$S_t + P_t - C_t = K \cdot e^{-r(T-t)}$$

europäischer Put

$S = 0$

- über Put-Call-Parität
- $P(S,t) = K \cdot e^{-r(T-t)} + C(S,t) - S(t)$
- $\Rightarrow P(0,t) = K \cdot e^{-r(T-t)} + \underbrace{C(0,t)}_{=0} = K \cdot e^{-r(T-t)}$

  $\forall t \in (0,T)$

Theorem (Put-Call-Parität)

Unter den Voraussetzungen an den vollkommenen Kapitalmarkt gilt für alle $t \in [0,T]$

$$S_t + P_t - C_t = K \cdot e^{-r(T-t)}$$

Vorbetrachtungen

Unterschied zu europäischen Optionen

- Bewertung von amerikanischen Optionen schwieriger

Vorbetrachtungen

Unterschied zu europäischen Optionen

- Bewertung von amerikanischen Optionen schwieriger
- identische Endbedingung wie bei europäischen Optionen
- sehr komplizierte Randbedingungen

Vorbetrachtungen

Unterschied zu europäischen Optionen

- Bewertung von amerikanischen Optionen schwieriger
- identische Endbedingung wie bei europäischen Optionen
- sehr komplizierte Randbedingungen
- $\Rightarrow$ keine analytische Lösung mehr möglich

Vorbetrachtungen

Unterschied zu europäischen Optionen

- Bewertung von amerikanischen Optionen schwieriger
- identische Endbedingung wie bei europäischen Optionen
- sehr komplizierte Randbedingungen
- $\Rightarrow$ keine analytische Lösung mehr möglich

Betrachtung von

- $C_{\mathrm{eu}}(S, 0) \leq C_{\mathrm{am}}(S, 0)$
- $P_{\mathrm{eu}}(S, 0) \leq P_{\mathrm{am}}(S, 0)$

Endbedingung

Endbedingung

- wie bei europäischen Optionen

$$V(S,T) = \begin{cases} (S-K)^+ =: C(S,T) \\ (K-S)^+ =: P(S,T) \end{cases}$$

$$\forall S \in (0,\infty)$$

amerikanischer Call

Wert eines amerikanischen Calls

- über Put-Call-Parität: $\forall t \in (0, T)$

$$
\begin{aligned}
C_{\mathrm{eu}}(t) &= \underbrace{P_{\mathrm{eu}}(t)}_{\geq 0} + S(t) - K \cdot e^{-r(T-t)} \\
&\geq S(t) - K \cdot e^{-r(T-t)} \\
&> S(t) - K = C_{\mathrm{am}}(t)
\end{aligned}
$$

amerikanischer Call

Wert eines amerikanischen Calls

- über Put-Call-Parität: $\forall t \in (0, T)$

$$C_{\text{eu}}(t) = \underbrace{P_{\text{eu}}(t)}_{\geq 0} + S(t) - K \cdot e^{-r(T-t)}$$

$$\geq S(t) - K \cdot e^{-r(T-t)}$$

$$> S(t) - K = C_{\text{am}}(t)$$

- $\Rightarrow C_{\text{eu}}(S, 0) = C_{\text{am}}(S, 0)$

amerikanischer Put

Wert eines amerikanischen Puts

- über Put-Call-Parität: $\forall t \in (0, T)$

$$P_{eu}(t) = C_{eu}(t) - S(t) + K \cdot e^{-r(T-t)}$$

$$\overbrace{<}^{?} K - S(t) = P_{am}(t)$$

- gilt wenn $C_{eu}(t) < K - K \cdot e^{-r(T-t)}$
- dies ist allerdings nicht unbedingt gegeben

amerikanischer Put

Wert eines amerikanischen Puts

- über Put-Call-Parität: $\forall t \in (0, T)$

$$P_{\text{eu}}(t) = C_{\text{eu}}(t) - S(t) + K \cdot e^{-r(T-t)}$$

$$\overbrace{<}^{?} K - S(t) = P_{\text{am}}(t)$$

- gilt wenn $C_{\text{eu}}(t) < K - K \cdot e^{-r(T-t)}$
- dies ist allerdings nicht unbedingt gegeben
- $\Rightarrow P_{\text{eu}}(S, 0) \leq P_{\text{am}}(S, 0)$

amerikanischer Put

- Existenz eines optimalen Ausübungspreises $S_f(t)$

amerikanischer Put

- Existenz eines optimalen Ausübungspreises $S_f(t)$

freies Randwertproblem

Teilung des Definitionsbereiches in 2 Teile:

amerikanischer Put

- Existenz eines optimalen Ausübungspreises $S_f(t)$

freies Randwertproblem

Teilung des Definitionsbereiches in 2 Teile:

- $\{(S,t)|0 \leq S < S_f(t); 0 \leq t < T\}$
  (vorzeitige Ausübung der Option)
  bei vorzeitiger Ausübung fällt der Wert des amerikanischen Puts auf den inneren Wert $V(S,t)$ zurück

amerikanischer Put

- Existenz eines optimalen Ausübungspreises $S_f(t)$

freies Randwertproblem

Teilung des Definitionsbereiches in 2 Teile:

- $\{(S,t)|0 \leq S < S_f(t); 0 \leq t < T\}$
  (vorzeitige Ausübung der Option)
  bei vorzeitiger Ausübung fällt der Wert des amerikanischen Puts auf den inneren Wert $V(S,t)$ zurück
- $\{(S,t)|S_f(t) \leq S \leq \infty; 0 \leq t < T\}$
  (Option wird nicht ausgeübt)
  Preis des amerikanischen Puts genügt der Black-Scholes-Gleichung

amerikanischer Put

- Existenz eines optimalen Ausübungspreises $S_f(t)$

freies Randwertproblem

Teilung des Definitionsbereiches in 2 Teile:

- $\{(S,t)|0 \leq S < S_f(t); 0 \leq t < T\}$
  (vorzeitige Ausübung der Option)
  bei vorzeitiger Ausübung fällt der Wert des amerikanischen Puts auf den inneren Wert $V(S,t)$ zurück
- $\{(S,t)|S_f(t) \leq S \leq \infty; 0 \leq t < T\}$
  (Option wird nicht ausgeübt)
  Preis des amerikanischen Puts genügt der Black-Scholes-Gleichung
- $\Rightarrow$ Bewertung eines amerikanischen Puts ist ein freies Randwertproblem mit freiem Rand $S_f(t)$

Veränderung der Modellvoraussetzungen

Modellvoraussetzungen

folgende vereinfachende Modellannahmen an den Finanzmarkt:

- Kurs des Basiswerts $S_t := S(t)$ genügt der stochastischen DGL
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW(t)$$
mit μ ... Drift (Trend), σ ... Volatilität des Basiswerts S_t
- arbitragefreier, liquider, friktionsloser Markt
- vollkommener Kapitalmarkt (Soll- $=$ Habenzins $r \geq 0$)
- zeitkontinuierlicher Handel des Basiswerts
- beliebig teilbarer Basiswert
- keine Dividendenzahlungen auf den Basiswert S
- vollständige Information der Marktteilnehmer

Veränderung der Modellvoraussetzungen

Modellvoraussetzungen

folgende vereinfachende Modellannahmen an den Finanzmarkt:

- Kurs des Basiswerts $S_t := S(t)$ genügt der stochastischen DGL
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW(t)$$
mit μ … Drift (Trend), σ … Volatilität des Basiswerts S_t
- arbitragefreier, liquider, friktionsloser Markt
- vollkommener Kapitalmarkt (Soll- = Habenzins $r \geq 0$)
- zeitkontinuierlicher Handel des Basiswerts
- beliebig teilbarer Basiswert
- keine Dividendenzahlungen auf den Basiswert S
- vollständige Information der Marktteilnehmer

Modifizierung der Black-Scholes-Gleichung

- modifizierte Volatilität:

$$\tilde{\sigma}^2 := \tilde{\sigma}^2(t, S, V_S, V_{SS})$$

- modifizierte Black-Scholes-Gleichung:

$$V_t + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(t, S, V_S, V_{SS})S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0$$

  mit $(S, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$
- nichtlineare Black-Scholes-Gleichung