

Bewertung von europäischen und amerikanischen Optionen

3. Vortrag - Mathematische Analyse / Beweise und Numerische Resultate

Claudia Münstermann, Christoph Lilke

Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

1. Februar 2008

Inhaltsverzeichnis

- 1 Erinnerungen
- 2 europäische Optionen
 - europäischer Put
 - europäischer Call
- 3 amerikanische Optionen
 - Analysis
 - Hindernisproblem
 - Numerik
- 4 nichtlineare Modelle
 - Modelle mit Transaktionskosten
 - Leland's Modell
 - Barles' und Soner's Modell
 - Risk Adjusted Pricing Methodology (RAPM)
 - Vergleich
- 5 Quellen

Modellannahmen

Modellvoraussetzungen

- Kurs des Basiswerts $S_t := S(t)$ genügt der stochastischen DGL

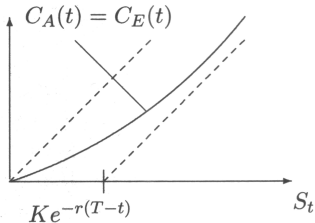
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW(t)$$

mit $\mu \dots$ Drift (Trend), $\sigma \dots$ Volatilität des Basiswerts S_t

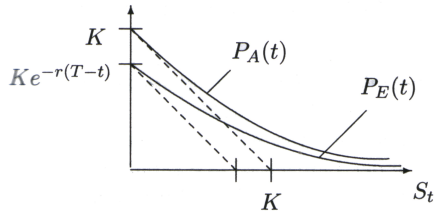
- arbitragefreier, liquider, friktionsloser Markt
- vollkommener Kapitalmarkt (Soll- = Habenzins $r \geq 0$)
- zeitkontinuierlicher Handel des Basiswerts
- beliebig teilbarer Basiswert
- keine Dividendenzahlungen auf den Basiswert S
- vollständige Information der Marktteilnehmer

Quantitativer Kurvenverlauf der Preise europäischer und amerikanischer Optionen

europäischer / amerikanischer
Call



europäischer / amerikanischer
Put



Black-Scholes-Gleichung (europäische Optionen)

Black-Scholes-Gleichung

der Preis einer europäischen Option $V(S, t)$ genügt der partiellen (parabolischen) Differentialgleichung:

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0$$

mit

- $(S, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$
- $r > 0 \dots$ Zinssatz
- $\sigma > 0 \dots$ Volatilität

End- / Randbedingungen eines europäischen Puts

Endbedingung

$$\forall S \in (0, \infty) : P(S, T) = (K - S)^+$$

Randbedingungen

$$\forall t \in (0, T) :$$

- $P(S, t) \xrightarrow{S \rightarrow \infty} 0$
- $P(0, t) = K \cdot e^{-r \cdot (T-t)}$

europäischer Put

Lösung der Black-Scholes Gleichung

$$P(S, t) = S \cdot \phi(d_1) - K \cdot e^{-r \cdot (T-t)} \cdot \phi(d_2)$$

mit

- $(S, t) \in (0, \infty) \times [0, T)$

- $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds, x \in \mathbb{R}$

(Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung)

- $d_{1,2} = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r \pm \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$

Beweis:

Einsetzen der gefundenen Lösung in die Black-Scholes Gleichung

Numerik europäischer Put

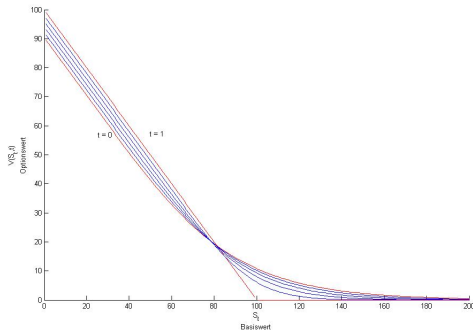


Abbildung: $t = 0, 0.2, \dots, 1, K = 100, T = 1, r = 0.1, \sigma = 0.4$

End- / Randbedingungen eines europäischen Calls

Endbedingung

$$\forall S \in (0, \infty) : C(S, T) = (S - K)^+$$

Randbedingungen

$$\forall t \in (0, T) :$$

- $C(S, t) \xrightarrow{S \rightarrow \infty} \infty$
- $C(0, t) = 0$

europäischer Call

Lösung der Black-Scholes Gleichung

$$C(S, t) = K \cdot e^{-r \cdot (T-t)} \cdot \phi(-d_2) - S \cdot \phi(-d_1)$$

mit

- $(S, t) \in (0, \infty) \times [0, T)$

- $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds, x \in \mathbb{R}$

(Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung)

- $d_{1,2} = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r \pm \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$

Beweis:

über Put-Call-Parität

Numerik europäischer Call

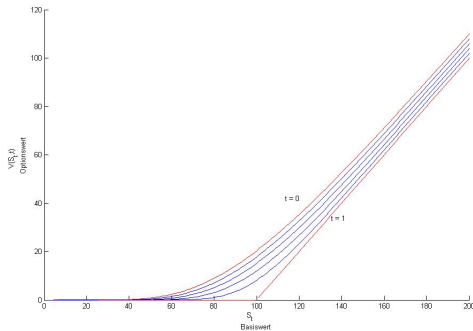


Abbildung: $t = 0, 0.2, \dots, 1, K = 100, T = 1, r = 0.1, \sigma = 0.4$

Numerik europäische Option

numerische Auswertung der Black-Scholes Formel

Wie wird die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ausgewertet?

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit Hilfe des Gaußschen Fehlerintegrals:

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

Numerik europäische Option

Beweis

da $\phi(0) = \frac{1}{2}$ gilt:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)\end{aligned}$$

Erinnerung

Wert einer amerikanischen Option

- $C_{eu}(S, 0) = C_{am}(S, 0)$
- $P_{eu}(S, 0) \leq P_{am}(S, 0)$

⇒ nur noch Betrachtung eines amerikanischen Puts

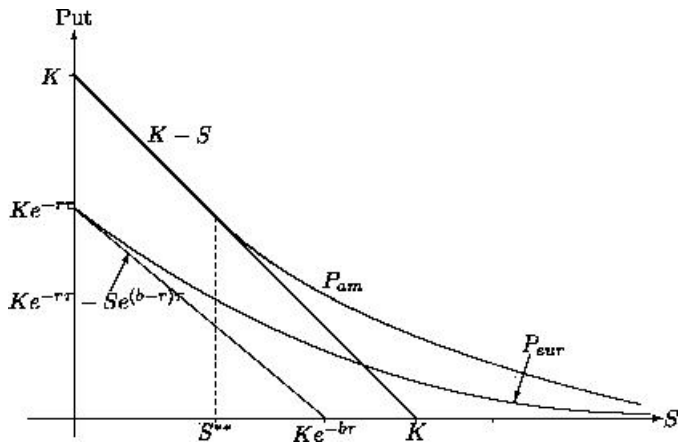
amerikanischer Put

- Existenz eines optimalen Ausübungspreises $S_f(t)$
(freier Randwert, welcher zusätzlich bestimmt werden muss)

freies Randwertproblem

- $\{(S, t) | 0 \leq S < S_f(t) \leq K; 0 \leq t < T\}$
(vorzeitige Ausübung der Option)
 $\Rightarrow P(S, t) = (K - S)^+$
- $\{(S, t) | S_f(t) \leq S \leq \infty; 0 \leq t < T\}$
(Option wird nicht ausgeübt)
 $\Rightarrow P(S, t) > (K - S)^+$

amerikanischer Put



amerikanischer Put

freies Randwertproblem

- falls $0 \leq S < S_f(t) \leq K$:
 $P(S, t) = K - S$ (innerer Wert)
- falls $S_f(t) \leq S \leq \infty$
 $P(S, t)$ genügt der Black-Scholes Gleichung

amerikanischer Put

Herleitung der Randbedingungen

- $P(S, t) \xrightarrow{S \rightarrow \infty} 0$
- Stetigkeit von $P(S, t)$ an der Stelle $S_f(t)$
 $\Rightarrow P(S_f(t), t) = (K - S_f(t))$

aber: $S_f(t)$ unbekannt \Rightarrow weitere Randbedingungen nötig:

- Stetigkeit der Ableitung von $P(S, t)$ an der Stelle $S_f(t)$
 $\Rightarrow \frac{\partial P(S, t)}{\partial S} = \frac{\partial (K - S)}{\partial S} = -1$ auf $S < S_f(t)$
 $\Rightarrow P_S(S_f(t), t) = -1$

amerikanischer Put

Wert eines amerikanischen Puts

Berechnung aus

- für $S \leq S_f(t) \leq K$

$$P(S, t) = K - S$$

- für $S > S_f(t)$

$$P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_{SS} + rSP_S - rP = 0$$

amerikanischer Put

Endbedingung

$\forall S \in (0, \infty) :$

$$P(S, T) = (K - S)^+$$

Randbedingungen

$\forall t \in (0, T) :$

- $P(S, t) \xrightarrow{S \rightarrow \infty} 0$
- $P(S_f(t), t) = K - S_f(t)$
- $P_S(S_f(t), t) = -1$

amerikanischer Put

Wert eines amerikanischen Puts

Umformulierung des Problems, so dass $S_f(t)$ nicht mehr auftaucht
 \Rightarrow freies Komplementaritätsproblem
(veranschaulicht am Hindernisproblem)

Idee

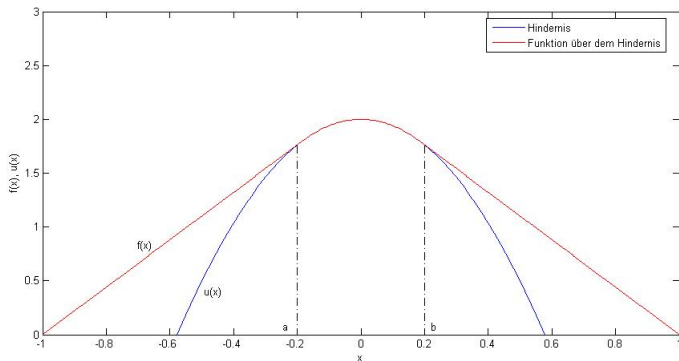


Abbildung: Seil $f(x)$ über einem Hindernis $u(x)$

Voraussetzungen

gegeben

Hindernis $u(x)$ mit

- $u(x) \in C^2(-1, 1)$
- $u > 0$ in $(a, b) \subset [-1, 1]$
- $u'' < 0$ in (a, b)
- $u(-1) < 0$ und $u(1) < 0$

Ziel

gesucht

Funktion $f(x)$, deren Graph ein Seil mit minimaler Seillänge über dem Hindernis $u(x)$ darstellt

- $f(x) \in C^1(-1, 1)$
- $f(-1) = 0$ und $f(1) = 0$
- $f \geq u$ in $(-1, 1)$
- $f'' = 0$ in $(-1, a)$ und $(b, 1)$
- $f = u$ in (a, b)

Hindernisproblem

Problem

a , b unbekannt, nicht gegeben, implizit durch das Problem definiert
⇒ freies Randwertproblem / Hindernisproblem

Ziel

Umformulierung des Problems, so dass die freien Randbedingungen
 a , b nicht mehr explizit auftauchen

Umformulierung Hindernisproblem

Eigenschaften von f

Umformulierung der obigen Eigenschaften von f :

- für $x \in (-1, a)$: $f > u$ und $f'' = 0$
- für $x \in (a, b)$: $f'' = u'' < 0$
- für $x \in (b, 1)$: $f > u$ und $f'' = 0$

und damit:

- $f > u \Rightarrow f'' = 0$
- $f = u \Rightarrow f'' < 0$

lineares Komplementaritätsproblem

Umformulierung des freien Randwertproblems als lineares Komplementaritätsproblem:

lineares Komplementaritätsproblem

Suche $f \in C^1(-1, 1)$ mit:

- $f'' \cdot (f - u) = 0$ in $(-1, 1)$
- $-f'' \geq 0$ in $(-1, 1)$
- $f - u \geq 0$ in $(-1, 1)$
- $f(-1) = f(1) = 0$

amerikanischer Put

lineares Komplementaritätsproblem

Wert eines amerikanischen Puts bestimmt sich als Lösung des folgenden Systems:

- $(P - (K - S)^+) \cdot (P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_{SS} + rSP_S - rP) = 0$
- $-(P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_{SS} + rSP_S - rP) \geq 0$
- $P - (K - S)^+ \geq 0$

mit Endbedingung

- $P(S, T) = (K - S)^+$ für $S > 0$

mit Randbedingungen

- $P(0, t) = K$ für $0 < t < T$
- $P(S, t) \xrightarrow{S \rightarrow \infty} 0$ für $0 < t < T$

Numerik amerikanischer Put

weitere Schritte

- Transformation des o.g. Systems für numerische Betrachtung
- Approximation des (neuen, transformierten) Lösungsgebiets $\mathbb{R} \times (0, T)$ mittels Finiter Differenzen
- Anwendung des SOR-Verfahrens (successive overrelaxation)
- Rücktransformation

Numerik amerikanischer Put

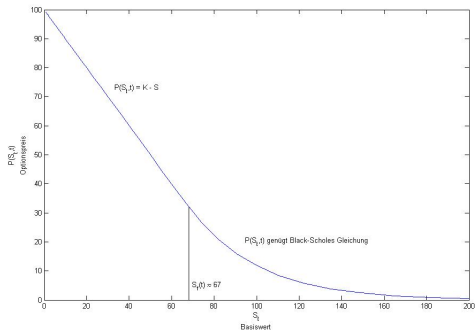


Abbildung: $t = 0, K = 100, T = 1, r = 0.1, \sigma = 0.4$

Veränderung der Modellvoraussetzungen

Modellannahmen

- Kurs des Basiswerts $S_t := S(t)$ genügt der stochastischen DGL

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW(t)$$

mit $\mu \dots$ Drift (Trend), $\sigma \dots$ Volatilität des Basiswerts S_t

- arbitragefreier, liquider, **friktionsloser** Markt
- vollkommener Kapitalmarkt (Soll- = Habenzins $r \geq 0$)
- zeitkontinuierlicher Handel des Basiswerts
- beliebig teilbarer Basiswert
- keine Dividendenzahlungen auf den Basiswert S
- vollständige Information der Marktteilnehmer

Problem

- bisher: Black-Scholes Gleichung ohne Transaktionskosten
⇒ zur vollständigen Risikoabsicherung ständige Portfolioumschichtung optimal
- jetzt: Einbeziehung von Transaktionskosten
⇒ je öfter Portfolio umgeschichtet wird, desto höher werden die Kosten
⇒ Trade-Off zwischen Häufigkeit der Portfolioumschichtung und Kosten für selbige
⇒ Auswirkungen auf Optionspreis

Modifizierung der Black-Scholes-Gleichung

Modifizierung der Black-Scholes-Gleichung

- modifizierte Volatilität:

$$\tilde{\sigma}^2 := \tilde{\sigma}^2(t, S, V_S, V_{SS}, \sigma)$$

- modifizierte Black-Scholes-Gleichung:

$$V_t + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2(t, S, V_S, V_{SS}, \sigma) S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0$$

mit $(S, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$

- nichtlineare Black-Scholes-Gleichung

Leland's Modell

modifizierte Volatilität

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \cdot (1 + Le \cdot \text{sign}(V_{SS}))$$

mit

- σ ... Volatilität des Aktienkurses S
- $Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\kappa}{\sigma \sqrt{\delta t}}$... Leland Zahl
- δt ... Frequenz der Transaktionen (Intervalllänge)
- $\kappa = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S}$... Transaktionskosten mit $S = \frac{S_{ask} + S_{bid}}{2}$

Leland's Modell

Ergebnis

unter der Annahme $V_{SS} > 0$ gilt:

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \cdot (1 + Le) > \sigma^2$$

$$\Rightarrow V_{Le}(S, 0) > V(S, 0)$$

Barles' und Soner's Modell

modifizierte Volatilität

$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \cdot (1 + \psi(e^{r \cdot (T-t)} \cdot a^2 \cdot S^2 \cdot V_{SS}))$ mit

- σ ... Volatilität des Aktienkurses S
- $a = \frac{\kappa}{\sqrt{\epsilon}}$ mit $\epsilon > 0$
- $\kappa = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S}$... Transaktionskosten mit $S = \frac{S_{ask} + S_{bid}}{2}$
- $\psi(x)$ genügt folgender Differentialgleichung:

$$\psi'(x) = \frac{\psi(x) + 1}{2 \cdot \sqrt{x \cdot \psi(x)} - x}, \quad x \neq 0$$

mit Anfangswert: $\psi(0) = 0$

Barles' und Soner's Modell

Ergebnis

Analyse der Differentialgleichung:

$$\psi'(x) = \frac{\psi(x) + 1}{2 \cdot \sqrt{x \cdot \psi(x)} - x}, \quad x \neq 0$$

mit Anfangswert $\psi(0) = 0$ ergab:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = -1$$

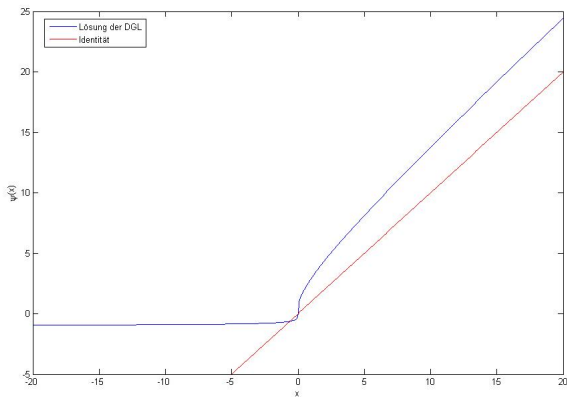
$\Rightarrow \psi(x) = x$ falls x groß genug

$\Rightarrow \tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \cdot (1 + e^{r \cdot (T-t)} \cdot a^2 \cdot S^2 \cdot V_{SS}) > \sigma^2$

$$\Rightarrow V_{BS}(S, 0) > V(S, 0)$$

Barles' und Soner's Modell

Lösung der o.g. Differentialgleichung unter Benutzung von ode45



RAPM

modifizierte Volatilität

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \cdot \left(1 + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{C^2 \cdot M}{2\pi} \cdot S \cdot V_{SS}}\right) \text{ mit}$$

- σ ... Volatilität des Aktienkurses S
- M ... Risikoprämienmaß
- $C = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S}$... Transaktionskosten mit $S = \frac{S_{ask} + S_{bid}}{2}$

RAPM

Ergebnis

unter der Annahme $V_{SS} > 0$ gilt:

$$\tilde{\sigma}^2 > \sigma^2$$

$$\Rightarrow V_{RAPM}(S, 0) > V(S, 0)$$

Parameter

Parameterfestlegung

im Folgenden gelten folgende Parameter:

- $r = 0.1$
 - $\sigma = 0.2$
 - $K = 100$
 - $T = 1$ (ein Jahr)
- 1 Plot der Differenz $C_{\text{nichtlinear}}(S_t, t) - C_{\text{linear}}(S_t, t)$ eines europäischen Calls
 - 2 Plot eines europäischen Calls mit und ohne Transaktionskosten

Vergleich mit linearem Modell

Leland's Modell vs. lineares Modell

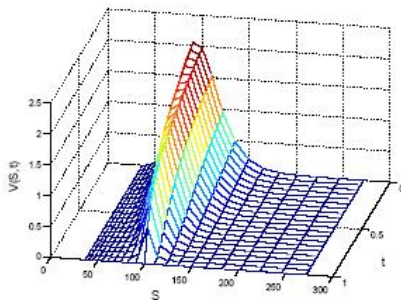


Abbildung: $\delta t = 0.01, \kappa = 0.05$

Vergleich mit linearem Modell

Barles' und Soner's Modell vs. lineares Modell

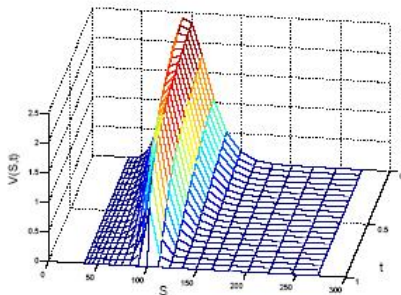


Abbildung: $a = 0.02$

Vergleich mit linearem Modell

Barles' und Soner's Modell mit $\psi(x) = x$ vs. lineares Modell

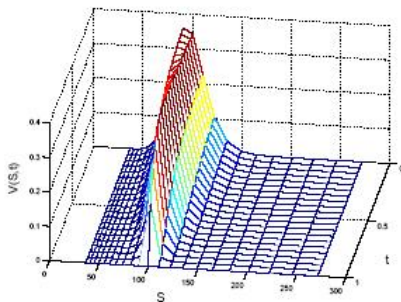


Abbildung: $a = 0.02$

Vergleich mit linearem Modell

RAPM Modell vs. lineares Modell

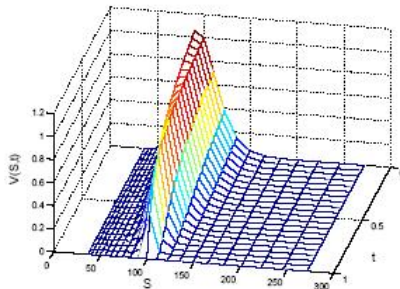
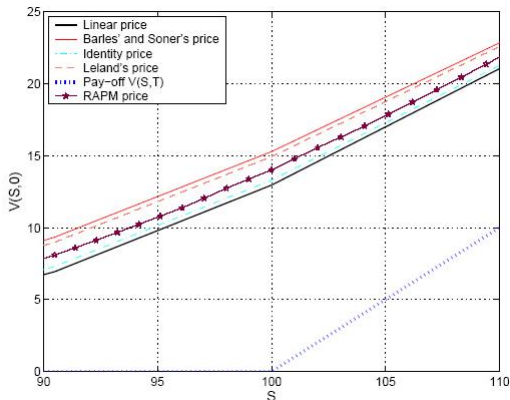


Abbildung: $M = 0.01$, $C = 30$

Vergleich aller Modelle

Preis eines europäischen Calls



Paper

- „On the numerical solution of nonlinear Black-Scholes equations“
Julia Ankudinova
- „On the Risk-Adjusted Pricing-Methodology-based valuation of Vanilla Options and Explanation of the volatility smile“
Martin Jandačka und Daniel Ševčovič
- „Option Pricing and Replication with Transactions Costs“
Hayne E. Leland
- „On Leland’s strategy of Option Pricing with Transaction Costs“
Kabanov Yu. M. und Safarian M. M.

Bücher und sonstiges

- „Finanzderivate mit MATLAB“
Michael Günther, Ansgar Jüngel
vieweg Verlag
- „Einführung in die Statistik der Finanzmärkte“
Jürgen Franke, Wolfgang Härdle, Christian Hafner
Springer Verlag
- Vorlesung Finanzmathematik 1 im WS 2007/08 an der TU
Berlin
Prof. Jochen Blath

Gibt es noch Fragen???